This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

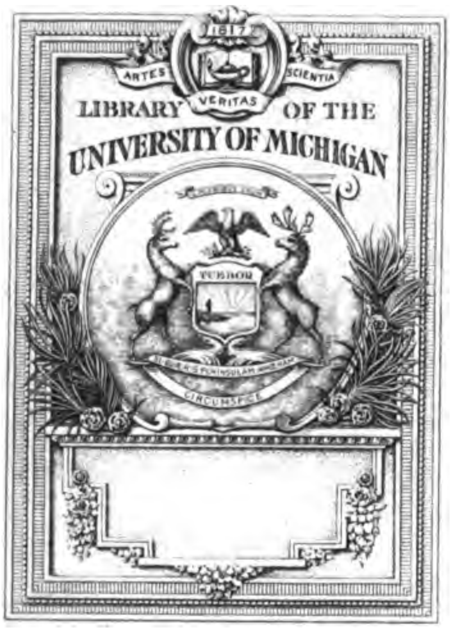
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

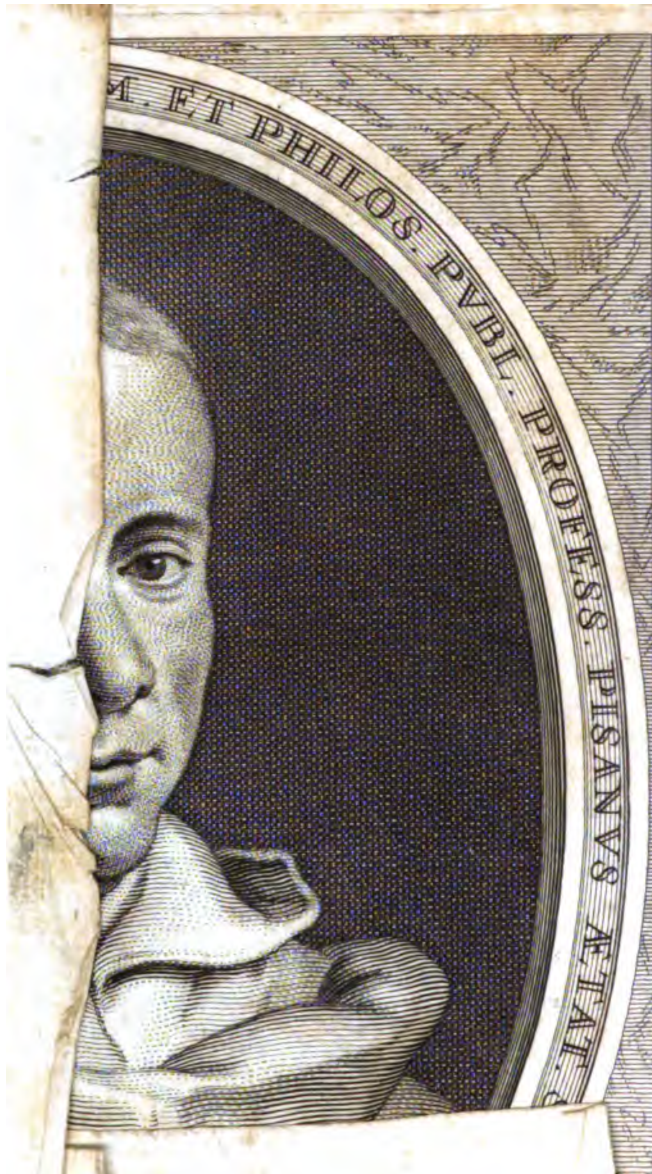
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
295
.G75

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
295
.G75


M. ET PHILOS. PVBL. PROFESS. PISANVS ÆTAT.

DE INFINITIS INFINITORUM, ET INFINITE PARVORUM ORDINIBUS DISQUISITIO GEOMETRICA

In qua, variis utrinſque generis gradibus demonſtratis, tum Methodi Infiniteſimalis fundamenta oſtenduntur, tum præcipuè PLUSQUAM INFINITA ſpatia hyperbolica VVallisſii, adverſus nuperrimos eorundem impugnatores, vindicantur.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO CREMONENSI

S. Theol. Doct. In Piſana Univerſitate Publ. Phil. Profeſſ. ac Magni Ducis Etruriæ Theologo, & Mathematico, è Regia Societate.

PISIS, MDCCX.

Ex Typographia Franciſci Bindi Impreſs. Archiepiſc.

De Superiorum Licentia.

Hist of [illegible]
Holt
[illegible] 6
13622

[illegible]

TH[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

DEO

VERITATIS,

LUMINUM PATRI,

SCIENTIARUM DOMINO,

GEOMETRIÆ PRÆSIDI,

BONORUM OMNIUM LARGITORI

ÆTERNO, IMMENSO, IMMORTALI,

OMNIPOTENTI,

INEFFABILI,
INCOMPREHENSIBILI,
INCOMPARABILI,

UNIVERSORUM
ARCHITECTO, CONDITORI, CONSERVATORI
BENEFICENTISSIMO,

IN ÆTERNUM, ET ULTRA REGNANTI.
QUI EST
SUPER OMNIA, INFRA OMNIA, CIRCUM OMNIA,
INTRA OMNIA, EXTRA OMNIA,
IN OMNIBUS,
UBIQUE PRÆSENTI, SED INACCESSIBILI,
PER CUNCTA DIFFUSO, SED INDIVISIBILI,
OMNIA MOVENTI, SED IMMOBILI,
PRIMO, ET ULTIMO
RERUM OMNIUM PRINCIPIO, ET FINI,
IN MINIMIS MAXIMO, IN MAXIMIS SUMMO,

 CIR-

CIRCULO UNIVERSITATIS
INTERMINATO,
INCIRCUMSCRIPTO,
CUJUS CENTRUM UBIQUE EST,
CIRCUMFERENTIA NULLIBI,

INFINITO

OMNIUM INFINITORUM,
ET PLUSQUAM INFINITORUM

MAXIMO,

CUJUS MAGNITUDINIS NON EST FINIS,
SAPIENTIÆ NON EST NUMERUS,
BONITATIS INFINITUS EST THESAURUS.

QUOD

SUÆ INFINITATIS VESTIGIA
CREATURIS IMPRESSERIT,

HOMI-

HOMINIQUE AD IMAGINEM SUAM FACTO

INFINITI PERSCRUTANDI CAPACEM MENTEM DEDERIT,

AC SUI IPSIUS,

IN ÆTERNO BEATITUDINIS LUMINE,

FACIE AD FACIEM, ALIQUANDO CONTEMPLANDI,

SPEM FECERIT, GRATIAM OBTULERIT, SORTEM PROMISERIT.

GRATI ANIMI ERGO,

OMNIUM OPERUM AUCTORI

EXIGUAM HANC OPELLAM

DE INFINITIS INFINITORUM,

INFINITEQUE PARVORUM ORDINIBUS

GUIDO GRANDUS

HOMINUM MINIMUS, MONACHORUM ULTIMUS,

SED INNUMERIS TANTÆ MAJESTATIS BENEFICIIS

ADSTRICTISSIMUS,

HUMILLIME OFFERT,

DAT, DICAT, CONSECRATQUE.

IN OPE-

IN OPERIS,

Et Auctoris Laudem.

ODE.

RESolve nexus, tolle repagula,
Adſtricta certo limite Quantitas,
Quæ Te coarctant terminorum
Contere liberior catenas:

Attende vaſtos, quos tibi nunc ſinus
Contracta nullis finibus Area
Recludit, immenſis datura
Planitiem ſpatiis capacem.

Quondam proterva fronte quibuslibet
Geometrarum niſibus obſtitit,
Proportionis, Calculique
Impatiens tolerare frænum;

Sed, Arte GRANDI, jam nihil intereſt,
Seu limes arctas ambiat undique
Extenſiones, ſive nullam
Obtineant ſpatia ampla metam.

Parent iiſdem Legibus omnia,
Progreſſus idem, par ratio datur,
Reſpectus unus ſingulorum,
Maxima quo minimis cohærent.

Magis ſtupendum eſt, quòd ſimilis tenor
Proportionum regnat in omnibus
Vel ſummè, & infinitè parvis
Particulis, quibus aucta creſcit,

Dato minori tempore quolibet,
Ex ordinatæ fluxibus Area;
Sed amplius miranda longè
Partibus his elementa rurſus

Minora, & iſtis quæ ſimili modo
Adhuc minores particulæ fluunt,
Nec limitem Natura novit,
Lumen ut Angligenum notavit.

Non

Non diſpar ordo per ſimiles gradus
Deducit Infinita prioribus
Majora ſemper, quæis deinceps
Agglomerat ſpatia ampliora.

Hinc VVallis inter novit Hyperbolas,
Ad altiores quando potentias
Aſſurgit applicata, pluſquam
Fine ſuperficiem carentem.

Complexa: quidquid ſive Parentius
Contra reclamet, ſeu Varignonius,
Quorum cavillos elevaſti
Docti Operis Faber, & Magiſter

Profundioris GRANDE Matheſeos,
Qui mente vaſta materiem quoque
Excellis infinitam, & ultra
Ingenii penetras volatu.

Seu Te Poeſis ſacrat Apollini,
Sive eruditis Hiſtoriis vacas,
Stylo aut peroras eloquenti
Dogmata ſeu reſeras [illegible]

Divinæ Legis, ſeu Penetralia
Naturæ aperto in Lumine collocas,
Seu jura pandis Machinarum,
Seu Numeri Harmonicū [illegible]:

Quæ ſit vagorum, quæ Orbita [illegible],
Aut quæ Refracti ſit Radii Via
Sequutaria, implexoſque ductus,
Algebra quos ſpecioſa fingit;

Ubique ſummus, nec ſuperabilis,
Sed unus ipſum Te ſuperas, viam
Geometrarum quando calcas
Tot variis methodis abundans.

Quæſita quis Te ſolvere promptior,
Curvaſque fili flexilis in modum
Verſare, menſuraſve certas
Adducere innumeris Figuris?

Id Viviani Ænigmata, id Hugeni
[illegible], id Cycli, & Hyperbole
[illegible], [illegible] meta carentum
Innumerabilis Ordo monſtrat.

Præceptori olim ſuo, in Obſequii Argumentum, canebat
Carolus Taglini Medicinæ Doctor,
Publicus Philoſophiæ in Piſano Lyceo
Profeſſor.

NOBILISSIMO, ATQUE ERUDITISSIMO VIRO

HENRICO NEVVTON

POTENTISSIMÆ ANGLORUM REGINÆ,

Apud Regiam Celſitudinem COSMI III. *M. Ducis Etruriæ, nec non apud Sereniſſimam Genuenſium Rempublicam,*

A B L E G A T O.

GUIDO GRANDUS FELICITATEM.

INcredibile ſciendi deſiderium, & inexplebilem, abſtruſa quæque, magisque profunda rimandi, cupiditatem humanæ menti ſummus Naturę Conditor indidit, ut ad Auctoris ſui cognitionem, non ſolùm officii ſui debito ſollicitante, gratique etiam amoris ſtimulo urgente, ſed ampliùs objecti ipſius ſublimitate ineffabili invitante, quodammodò excitaretur. Huic genio præ omnibus indulgentes, imò fræna laxantes, acutiſſimi, ac pręſtantiſſimi Mathematici, aſſiduo, & operoſo ſtudio in id maximè incubuerunt, ut ordine perſpicuo rationis ſuæ vim gradatim promoventes, ex primis, planiſſimis, ac cuilibet facilè obviis veritatibus, quarum notitiam ab ipſo Deo Opt. Max. noſtris animis inſertam accepimus, ad alias magis arduas detegendas ſibi viam munirent, eo ſucceſſu, quem pauci licèt pro merito intelligant, plerique tamen in dies ſentiunt, & omnes jure mirantur. Nam, ut cetera omittam admiranda Theoremata, quæ ſe ab ipſis Geometriæ naſcentis exordiis prodiderunt, velut de æqualibus triangulis, & parallelogrammis in eadem baſi, atque in iiſdem parallelis, ad quàmlibet diſſitum intervallum obliquè excurrentibus: de ſpatiis quantumvis exiguis ad quamvis lineam applicandis, adeoque ad perimetrum majo-

rem quolibet dato redigendis &c. quæ nunc, ut nugas, & crepundia ætatis illius deſpicimus: manet adhuc inconcuſſa adverſus omnem reluctantis imaginationis conatum, adverſus inanes Scepticorum cavillationes, & Pſeudophiloſophorum impetus, priſcis olim temporibus demonſtrata, cujuſvis magnitudinis infinita Diviſibilitas: manet tam certa, & evidens, quàm adhuc intellectui noſtro incomprehenſibilis, quæ ante omnem hominum memoriam olim detecta fuit, nonnullarum quantitatum Incommenſurabilitas, quam ſiquis ignoraret, hunc non hominem, ſed pecudem potius dicendum Plato cenſebat: manet adhuc numquam non celebranda, æquè ac ſemper ſtupenda illa Aſymptotorum affectio, quam, adoleſcente jam Geometria, Conici Scriptores deprehenderunt, nunc autem Mathematici recentiores, non ad unam, aut alteram curvam, Hyperbolam ſcilicet Apollonii, & Conchoidem Nicomedis, dumtaxat reſtringi, ſed innumeris prorſus novis lineis facillimæ deſcriptionis, nonnullis etiam antiquis eadem lege continuatis, ut Nicoſtrati Quadratici, & Dioclis Ciſſoidi, convenire demonſtrarunt. Verùm hæc nulla ſunt, ſi cum illa felici non minùs, quàm audaci Geometriæ, virilitatem ſuam jam adeptæ, aggreſſione conferantur, qua ſcilicet innumeros terminos in unam ſummam finitam colligere, immenſæ longitudinis ſolida, & ſuperficies, terminatæ, ac undique circumſcriptæ ſui generis areæ coequare, infinitarum quantitatum proportiones, & gradus diſtinguere, & infinitè parva magnitudinum elementa reperire, atque in varias claſſes diſtribuere docuit. Neque verò ad ſterilem, & otioſam dumtaxat ſpeculationem hæc pertinere, non etiam externis hominum uſibus, quibus civilis vita maximè indiget, inſervire, quis arbitretur: nulla quippe adeò abſtracta, & ab omnis materiæ commercio remota cognitio in Geometricis aſſignari poteſt, cui vel nunc, vel aliquando, fructus aliquis ex his, quæ apud vulgus in pretio eſſe ſolent, non ſit referendus, ſive inde per ſe ipſum pendeat, ſive mediis aliis notitiis ejuſdem, aut alterius Scientiæ, quam prior illa cognitio perfecerit. Profundioribus utique Geometriæ ſpeculationibus, & abſtruſioribus Analyticæ Calculis, tum Mechanicam, tum Opticam, tum Aſtronomiam, tum Nauticam, tum Geographiam, tum Architecturam, ac cæteras denique Scientias, & Artes, Reipublicæ commodis, & utilitatibus proſpicientes, auctas hodie, locupletatas, & ad faciliorem methodum redactas accepimus, novisque semper incrementis, [illegible]

tio-

tiorum Mathematicorum beneficio, magis ac magis in dies per-
ficiendas ſperamus. Quocirca ſumma ſollicitudine omnino curan-
dum eſt, ut profundiores Geometrarum Theoriæ, quas perſe
jucundiſſimas, & de univerſo hominum genere tam benè meren-
tes experimur, aſſiduè promoveantur, habitoque inter veras, &
(ſiquæ irrepſerint) falſas delectu, his confutatis confirmentur
illæ, atque ab obiectis fortaſſe ſcrupulis vindicentur. Hinc, cùm
Clariſſimi, inter præcipuos inclytæ Nationis tuæ Mathematicos,
Joannis VVallisii PLUSQUAM-INFINITA ſpatia, quæ primus
ipſe inter hyperbolas infinitas altioris ordinis, ſumma cum om-
nium admiratione, detexit, à nonnullis Regiæ Pariſienſis Acade-
miæ Geometris nuper in dubium vocari, tam apertè reijci ani-
madverterem, operæ pretium facturum me exiſtimavi, ſi rem
totam [quæ maximi eſt in ſtudiis noſtris momenti, ob connne-
xionem, quam cum methodo recentiorum Analyſtarum Scientia
hæc Infiniti ſortitur] iterum examini ſubiicerem, & ad Lydium
Geometriæ lapidem exigerem, de tam celebri controverſia deli-
beraturus: cùmque VVallisii veſtri partibus multiplex ab ipſa
veritate ſuffragium accedere deprehendiſſem, irrogatam Viro
graviſſimo injuriam propulſandam, injuſtam immortali ejus Nomi-
ni labem abſtergendam, ejuſque doctrinam ab omni fallaciæ ſuſ-
picione hoc libello purgandam, Te potiſſimùm hortatore, con-
ſtitui. Novos addidit operi ſtimulos ipſamet Illuſtriſſima Rega-
lis Societas, à Sereniſſimo Rege Carolo II. ad naturales Scientias
promovendas fundata, dum me, obſcurum, ac peregrinum ho-
minem, inter ſocios ſuos ultrò conſcribendum cenſuit, meaſque,
in Armachani Præſulis ſyſtema ſonorum, ſpeculationes, Illuſtriſ-
ſimo Præſide Iſaac Nevvtono Equite aurato, Mathematicorum
noſtri ſeculi Principe, necnon Doctiſſimo Haulæo, in Univerſita-
te Oxonienſi Profeſſore Aſtronomiæ Saviliano, ſummè probanti-
bus, ejuſdem Academiæ actis inſeri, & inter philoſophicas Tran-
ſactiones edi mandavit: cui quidem honori, ut aliqua ex parte
me gratum oſtenderem, nihil opportunius, & huic propoſito ac-
comodatius occurrit, quàm ſi prelaudati VVallisii, qui Regiam
ipſam Societatem tantoperè illuſtravit, famam ab illata calum-
nia defendendam hac Geometrica Diſquiſitione ſuſciperem, quam,
meo nomine, eidem Ampliſſimo Academicorum Cœtui communi-
candam, Tibi offero, Vir Illuſtriſſime, atque Eruditiſſime, ut
mei ſimul erga Te obſequii monumentum aliquod apud poſteros
ma-

maneat, nulla temporis injuria intercidendum. Nihil attinet, ut in Virtutum tuarum, hoc qualecunque venerationis teſtimonium ſuo veluti jure exigentium, uberrimum campum excurrere orationem meam permittam, cum ipſo etenim præſentis Tractatus titulo ampliſſimi hujus argumenti fecunditas decertaret, meque in ſpatia PLUSQUAM-INFINITA laudum tuarum abduceret; ac dolorem denique noſtrum, ex imminentis jacturæ timore conceptum refricaret, dùm à Prudentiſſima Regina, meritorum tuorum ſat conſcia, eximiis honoribus auctus in Patriam revocaris, omnium, quibus Eruditio, Doctrina, Facundia, Elegantia tua, cum ſumma Humanitate conjuncta, perſpecta eſt, amorem ſecum, & deſideria ſimul aſportaturus. Unum igitur ſupereſt, ut Te, qua licet fiducia, ſupplex exorem, ad libellum hunc benigna, qua ſoles, fronte excipiendum, ejuſque Auctori, quibus ipſum dignaris, benevolentiæ, & gratiæ tuæ officia jugiter continuanda. Vale.

Piſis, Pridie Kal. Februarii MDCCX.

DATE DUE

2198
Call Number
QA 295 G75

Author: Grandi, Guido
Title: De Infinitis Infinitorum

Volume
Copy
Please Check
☐ Undergrad.
☐ Grad.
☐ U.M. Staff
☐ Other
Form 7900

PLEASE PRINT
I.D. No.
Name: P. S. Jones
Street Address: 3207 A.H.
City
Michigan
Zip Code
U.M. Staff Department: Math
Position: Prof Em.
Phone

ERIS
NTO
ludium.

[1] & undiquecerto
atitur,
aſcendere mentem,
Vireſque humani luſerat ingenii.
Auſus [2] *Ariſtoteles*, auſus (3) *Plato*, cuncta *Sophorum*
Turba [4] hoc immenſum eſt traiicere auſa vadum?
Cum

NOTÆ) *Ut lucem aliquam materia per ſe obſcuriſſima, ac Muſis penè intractabili, conciliarem, explanationem ejus aliquam in his notis ſubdere viſum fuit, & Amicorum conſilia perſuaſere: qui ſecus faciendum duxerit, eas pro non adiectis habeat, prætereatque.* Itaque (1) Infinitum *cujuſvis generis hic intelligo, ejuſque Hiſtoriam penè univerſam hoc carmine complector. Illud, tametſi noſtrum captum excedere videretur, explicandum ſibi ſumpſit* (2) Ariſtoteles *in lib.* 3. *phyſ. aſſerens text.* 24. *ejus notitiam ad Phyſicam pertinere, & text.* 25. *ipſius naturam ab omnibus, qui accuratè philoſophiam tradiderant, conſideratam fuiſſe affirmans, atque in primis à* (3) Platone, *quem text.* 27. *narrat*, duo Infinita *poſuiſſe*, Magnum, & Parvum: *quaſi recentioribus Mathematicis præluſerit, qui* infinitè magna, & infinitè parva *excogitarunt. Omnes denique* Philoſophi Scholaſtici (4) *de Infinito diſputare*

Cum ſcopulis (5) luctata diù, ſæviſque procellis,
Irruit adverſis obvia turbinibus;
Sed tumida imbelles laſſavit ut unda lacertos,
Viribus effractis, vertere cogit iter.
Qui contra obſiſtunt, hos gurgitis ampla vorago,
Syrtibus allidens oſſa, caputque, rapit;
At pauci hinc reduces, tenuere ubi littoris oram,
Inſtabiles, greſſu ſæpe labante, ruunt;
Nec niſi tricarum (6) male olentes denique ſpumas,
Inflatis buccis, quiſquiliaſque vomunt:
Non numerare ſinus, non explorare profundum
Plumbo, non fines poſſe notare datum eſt.
Subrogat hiſce ſuos divina Matheſis (7) alumnos,
Et deſperatum fortior urget opus.
Tuque Syracuſiæ tutela, & gloria gentis
Antevolas alios, ingenioſe [8] Senex;
Aſſuetus vaſtam numero comprendere (9) arenam,
Non modò quæ ſiculo littore ſparſa jacet,
Sed maris, & terræ, ſtellarum, & totius orbis
Implerent quotquot grana minuta ſinus;
Quamvis erat ſpatio contermina fine carenti
Congeries, paucis non referenda notis:
Quàm facilè & pelagus, quo extenſio limitis expers
Clauditur, ingreſſus ducis in alta ratem!

Non

tare aggreſſi, ob graviſſimas, quibus involvitur, difficultates (5) hîc allegoricè expreſſas, quid profecerint, & quos fructus (6) demum inde retulerint, notius eſt, quàm hic exponi apertius conveniat. Mathematici (7) ergo Philoſophis ſubſtituti ad Infiniti contemplationem, primuſque [8] Archimedes *Syracuſius hoc vadum tentavit; (9) qui multitudinem arenularum, totam firmamenti etiam Pythagorici capacitatem implentium, in libro, cui titulus eſt* Arenarius, *computavit, ut Geloni Regi probaret,*

Non brevia, & cautes, non acroceraunia terrent,
Non venti, aut nymbi, aut monſtra morantur iter.
Sed noſtris ſubducta oculis vix inclyta puppis,
Metam omnem excedens, invia quæque ſecat,
Cùm ſubitò emergit ſcopulorum immenſa propago,
Quadrupla queis ratio, (10) forma tricuſpis erat.
Hic magnus Geometra jubet conſiſtere: & ultra
Quid properamus? ait: Sat mihi cuncta patent.
Jam video innumeros, quotquot ſine fine quadrantes
Succreſcunt primo, limitem habere ſuis!
Nam triquetri ſeries erit omnis [11] epitrita primi:
Inde parabolici eſt area [12] nota loci.
Portum igitur victor repetit, radioque magiſtro,
Tanti operis certa in littore ſigna notat.
Proximus huic, longo ſed temporis intervallo,
Ingreditur vaſtum jam (13) *Galilæus* iter;
Expedienſque Tubum (14), quo tot portenta retexit,
Uno Infinitum proſpicit intuitu.
Scrutatur numeros, (15) quotquot mens fingere poſſit,
Illorum varios comparat inde gradus.
Radiceſque [16] omnes, quadrata, cuboſque recenſens,
Nunc totidem (17), nunc ſe plura videre putat;
Nam

ret, numerum arenarum Syracuſii littoris infinitum non eſſe. (10) Porrò infinitam ſeriem triangulorum in quadrupla ratione decreſcentium, quam ſeries tricuſpidum ſcopulorum, eandem rationem obſervantium, hoc loco exprimit, conſideravit Archimedes lib. de Quadr. Parabolæ prop. XXIII. eamque eſſe oſtendit [11] ſeſquitertiam primi trianguli, inde (12) quadraturam parabolæ determinans, eo quod in ſimilem triangulorum, quadrupla ratione decreſcentium, infinitam ſeriem reſolvatur. (13) Poſt XVIII. ſæcula Galilæus Galilæi Nobilis Florentinus Academicus Lynceus, M. D. Ethruriæ Philoſophus et Mathematicus (14) optici tubi, quo tam multa priſcis incognita ſpectacula in cælo detexit, inventione celeberrimus (15) omnes poſſibiles numeros infinitos contemplatus eſt dial. 1. de nova Scientia (16) quærens, num plures in illis ſint radices, an quadrata, vel cubi. Nam (17) ex una parte totidem videntur,

Nam cuivis numero (18) ſuus eſt cubus, atque quadratũ
Cuique ſuum parili lege referre potes;
Rara ſed in numeris [19] quadrorum turma, cuborum
Rarior occurſus, non totidem eſſe ſinit.
Ergo anceps animi Vir Lynceus hæret, (20) in Uno
Quærat, an in Multis quod ſine fine vocant;
Unum etenim [21] ſibimet radix, cubus, atq; quadratũ,
Claudit inexauſto nomina cuncta ſinu.
Ambigit et titulos (22) *Æquum*, *Majuſque*, *Minuſque*
Immenſo in numero, aut mole, tenere locum.
Hos tamen evadit ſcopulos qui [23] poſt Galilæi
Signa, brevi cymba, ponè legebat iter,
Ex inſectilibus (24) componere cuncta elementis
Arte (25) *Cavallerius* nobiliore potens.
Huic licèt [26] innumeris ſint corpora conſita planis,
Plana infinitis conſita lineolis,
Ipſe figurarum [27] plana omnia comparat, omnem
Rectam hujus, rectis omnibus alterius;
Quin et ubi innumeras (28) aperit progreſſio partes,
Continuo ſeriem diminuente logo,

Non

ex alia non totidem: [18] *primum ſuadet perpetua correſpondentia cujuſvis radicis cum ſuo quadrato vel cubo,* (19) *ſecundum evincit obſervatio, quòd omnes numeri ſunt radices, non omnes verò quadrati ſunt, aut cubici, quorum tanto major eſt infrequentia, quantò magis ab unitate ad altiores numeros aſcendimus:* Exhinc *dubitat Galilæus* (20) *annon, potiuſquàm in Multitudine, quærenda ſit Infiniti eſſentia in Unitate* (21) *quæ ſibimet quadratum, cubus, et qualibet ſui ipſius poteſtas eſt. Imò ſuſpicatur* (22) *titulos æqualis, & inæqualis non habere locum, ubi ſermo ſit de Infinitis.* (23) *Poſt veſtigia Galilæi, qui methodi Indiviſibilium ſpecimen dederat Dial. 1. cit, ubi de cylindro per hemiſpherium excavato, et Dial. 3. in comparatione ſpatii motu accelerato, & æquabili eodem tempore confecti, veniſſe viſus eſt* (24) *Indiviſibilium Geometriæ Auctor* (25) Bonaventura Cavallerius *Mediolanenſis, qui licèt* [26] *ſolida ex infinitis ſuperficiebus, & ſuperficies ex infinitis lineis contextas ſupponat, tamen* [27] *docet* omnia indiviſibilia *unius figuræ omnibus alterius conferre, omnia ſimul plana in ſolidis, et omnes lineas in ſuperficiebus comparans. Inſuper* (28) *Infinitos terminos continuò decreſcentes, nedum in ratione quadrupla*

[29) *ut*

Non modò cũ quadrupla eſt (29) Siculi ut doctrina Ma-
    Prodidit, at quęvis regnet in his ratio, [giſtri
Ad certos ſemper docuit reſtringere fines, (30)
    Notaque congeries integra facta fuit.
Flexilibus rectis (31) id *Torricellius* (32), inde
    Gregorius [33] variis expoſuere modis.
Quodque fidẽ ſuperat, ſolidum (34] prior ille rotundũ,
    Infinita acies cujus hyperbolica eſt,
Mole ſua oſtendit finito æquale (35) cylindro,
    Qui à centro ad ſolidi pertinet uſque baſim.
Inde alii (36) innumeras planas, ſolidaſque figuras
    [*Sluſius* (37) hos inter, (38) *Craigius*, (39) *Hugenius*]
Quamvis in immenſum quęvis ſe extenderet axem,
    Ad certi ſpatii ſigna venire jubent.

Rur-

(29) *ut dudum Archimedes oſtendit loc. cit. ſed in qualibet geometrica progreſſione procederent, idem Cavallerius (apud Torricell. De Dimenſ. Parab. Schol poſt Lemm. XXVII.) in unam ſummam* (30) *colligere docuit, quam demonſtrat æqualem tertia proportionali poſt primam differentiam, & primam magnitudinem. Id verò* (31) *per flexilinea rectarum ſibi alternatim parallellarum triangulo inſcripta elegantius probavit idem* (32) Evangeliſta Torricellius *Faventinus M. D. Ethruriæ Mathematicus ſub annum MDCXLIV. quod et alijs modis exibuit Gregorius à S. Vincentio Soc. Jeſu anno MDCXLVII. lib. 2. De Circuli Quadratura.* (34) *Jucundum verò, ac penè tum temporis incredibile ſpectaculum Geometris præbuit Torricellius, Solidum nempe acutum hyperbolicum infinitè longum, ab hyperbola circa aſymptoton converſa genitum, quod* (35) *oſtendit æquale finito cylindro eidem baſi adiacenti, ſuaque altitudine ad uſque centrum hyperbolæ extenſo, quem gignit rectangulum aſymptotico ſpatio inſcriptum in eadem converſione.* (36) *Alii deinceps, poſt Torricellium, figuras infinitè longas, tam planas, quàm ſolidas metiri auſi ſunt, quos longum eſſet enumerare, Ut ſunt* Iſaac Barrovius *in lect. Geom.* Joannes Ceva *in Geometria Motus*, Petrus Nicolas *Soc. Jeſu In Exercit. Geometr.* Antonius Lalovera *Soc. Jeſu De Cycloide*, Petrus Fermat *Opuſc. poſthum.* Jacobus Gregorius *in Geometria part. univerſ.* David Gregorius *in Exerc. Geom.* Georgius Cheynæus *in Method. Fluxionum &c. tres autem ſolos carminis opportunitas exprimere conceſſit*, (37) Renatum Franciſcum Sluſium *in Miſcellan.* (38) Joannem Craigium *in method. quadrandi figur.* (39) Chriſtianum Hugenium, *a quo et Ciſſoidis Dioclea dimenſionem habemus apud VValliſium in Schol. prop. XXIX. cap. V. Mechanica, & Spatii Logarithmici menſuram ad calcem Diatribæ de cauſa gravit. indicatam, quam nos in Hugenianis, cum extenſione ad Logarithmicas altiorum graduum, & multis id genus aliis, demonſtravimus*

Rurſus arithmeticas ſeries quoque *Mengolus* (40) offert,
Quarum finis abeſt, integra ſumma datur;
Unum ubi dividitur (41) cunctis quadriſve, cubiſve,
Omnibus aut planis, aut ſolidis numeris;
Quamlibet excedit ſed tunc progreſſio metam,
Cũ ratio (42) harmonica eſt, quę ſua membra ſecat.
Altiùs at penetrans pelagi tam grandis abyſſum
Auctor inexhauſtæ [43] *VVallis* Arithmeticæ
Ex Infinitis [44] PLUSQUAM-INFINITA accerſit,
Et graduum ſeries ſupputat innumeras.
Naſcitur hinc varius rerum ordo (45) fine carentum,
Horret inacceſſas mens ſtupefacta vias.
Nec ſatis: in ſummè exiguis diſcrimina (46) *Newtus*
Fermè eadem reperit, (47) *Leibnitiuſque* ſimul;

Ille

vimus. (40) *Simile quid in fractionibus numericis infinitis exhibuit* Petrus Mengolus *Bononienſis in Quadraturis arithmeticis, earum ſummam accuratè colligens, & finitam eſſe oſtendens,* (41) *quoties unitas denominatur, vel omnibus numeris quadratis, ut* $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{25}$ $\frac{1}{36}$ *&c. (quę ſeries minor eſt* $\frac{3}{4}$*) vel omnibus cubis, ut* $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{64}$ *&c. (quæ minor invenitur* $\frac{3}{8}$*) vel omnibus planis numeris, ex ductu duorum quorumvis proximorum genitis, ut* $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ *&c. (quæ præciſè æquatur 1.) vel omnibus Solidis ex ductu quorumvis trium ſibi ſuccedentium productis, ut* $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{60}$ *&c. (quæ præciſè adæquat* $\frac{1}{4}$*) At verò infinitam eſſe ſummam oſtendens,* [42] *ubi progreſſione harmonica fractiones decreſcunt, ut* $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ *&c. At* (43) Joannes VVallis *Geom. Profeſſor Savilianus Oxonii in Arithmetica Infinitorum* (44) *Spatia* Pluſquam-Infinita *etiam commemorat prop.* 104. & 105. *quæ ſcilicet infinities ſuperant areas jam infinitas; unde* (45) *patet, eodem jure ſpatia rurſus infinities majora iiſdem eſſe pluſquam infinitis excogitari poſſe, & adhuc alia, a quibus hæc ipſa rurſus infinities ſuperentur, & ita deinceps ſine limite ad alia altioris ordinis infinita progrediendo. Similiter* (46) Iſaac Newton Eques Auratus *eundem progreſſum in* Infinitè parvis *proponit, quibus alia infinities minora ſint, atque ita porrò,* neque novit natura limitem, *ut ipſe ait in Schol. Lemm. XI. ſuorum Principiorum Mathem. Philoſ. Et ſimile quid* (47) Godefridus Guiglielmus

Leib-

Ille tamen fluxus [48] vocat, & momenta fluentum
Quantorum punctis (49) indicat impoſitis;
Quartam hic (50) litterulam adiciens ad ſymbola rerū,
Queis diſſerre videt proxima quæque, notat.
Naturæ hinc ſecreta patent (51) myſteria utrique,
Majus et à parvis maxima lumen habent.
Namque Catenarum [52] flexus, & Elaſmatis (53) arcū,
Quemve ſinum pandant (54) turgida Vela notis:
Semita quæ gravium ſit [55] Iſochrona ſponte cadentū,
Et [56] Brachyſtochronas diſcimus inde vias.
Prodit & hinc (57) varii moderatrix Regula motus,
Et vim (58) centrifugā (59) centripetamq; regens:
Nec latet illa dies, (60) breviora crepuſcula cui ſunt,
Nec, minimū obſiſtat cui mare, [61] forma ratis;

Cur-

Leibnitzius *excogitavit, cum hoc diſcrimine, quod* Newton *quantitates infinitè exiguas* (48) Fluxiones *vocat, ſeu Momenta, aut momentanea incrementa, vel decrementa quantitatum, quas* Fluentes, *ideſt continua ſucceſſione creſcentes, aut decreſcentes concipit: eaſque fluxiones* (49) *puncto ad rei fluentis ſymbolum ſuperimpoſito deſignat, ut ſi fluens ſit* x *vel* y, *fluxiones earum ſint* $\dot{x}$ & $\dot{y}$. *At Leibnitzius* (50) *addit litteram quartam, ſeu characteriſticam* d, *nam has particulas infinitè parvas* Differentias *vocat, itaque ipſarum* x, & y *differentiæ notantur per* dx, & dy; *quin et ulteriores fluxionum fluxiones duplici puncto impoſito per* $\ddot{x}$ & $\ddot{y}$ *indicat ille, per geminatum* d *exprimit iſte, ut* ddx, ddy; *atque ita multiplicando puncta, vel characteriſticam cæteræ quantitates infinitè parvæ altiorum graduum denotantur* (51) *Multa hinc Phyſicomathematica* Problemata, *Veterum Methodo impervia, ſoluta ſunt: Nempe* (52) *Curva* Catenaria, *ſeu funicularia, quam catena ſuſpenſa æmulatur;* (53) *Curva* Elaſtica *quam lamina Elaterum ſe evolventium deſignant,* (54) *Curva* Velaria, *in quam tumida vela ſinuantur,* (55) *Curva* Iſochrona *per quam grave deſcendens æqualiter, æquali tempore, ad datum punctum accedit,* (56) *Curva* Brachyſtochrona, *ſive celerrimi deſcenſus gravium ex dato puncto ad datum punctum; Item* (57) Regulæ motuum, *utcunque vario velocitatis incremento, aut decremento procedentium,* (58) *Leges quoque* Vis centrifugæ, *hoc eſt conatus à centro recedendi in qualibet curva, quam mobile deſcribat,* & [59] Vis centripetæ *ſive impetus urgentis mobile in aliquod centrum, quacunque proportione variari ſupponatur in acceſſu, aut receſſu à tali centro (quarum virium utramque generali nomine* Virium centralium *comprehendit Cl. Varignonius in Actis Academiæ Regiæ, ubi præclara multa de his, & de motuum Regulis oſtendit)* [60] *Dies quoque breviſſimi, ſeu* Minimi crepuſculi *determinata, itemque* (61) *figura Navigii*

Curvarumque licet (62) menſuras noſſe, (63) recurſus,
(64) Flexus, (65) Cōtactus, (66) Oſcula, (67) Centra, (68) Focos.
Signaque in his radii quę lambant (69) cauſtica, dum lux
Sive refracta ſubit, ſive reflexa redit;
Et quacunque baſi ſubnixa figura rotetur,
Quas gignat punctum mobile [70] Cycloidas;
Tum quæ ſe evoluens, [71] poſt ſe veſtigia linquat,
Dùm curva amplexus deſerit ipſa ſuos:
Et quidquid (72) *Bernulliadum* par nobile fratrum,
Aut [73] *Hoſpitalius*, (74) *Tſchyrnhusius*, [75] *Facius*
Inſeruere tuis, celeberrima (76) *Lypſia*, in Actis,
Dum methodi illuſtrant dogmata prima novæ.
Limitis expertum quantorum Analyſta (77) repugnat
Sed *Nievuentitius*, nec ſatis iſta probat;
Omne etenī augmentū [78] et graduū diſcrimina queq;
Ex Infinito reiicienda putat;

Re-

gii Minimæ reſiſtentiæ *inter omnia, quæ in eodem fluido moveantur* (62) Curvarum rectificatio, *& arearum ab iis comprehenſarum dimenſio* (63) Puncta reverſionum, *in quibus curvæ aliquot retorquentur in eaſdem partes, unde venerant* (64) Flexus contrarii, *ubi è concavis convexe fiunt* (65) Tangentes *cujuſvis curvæ imaginabilis* [66] Circuli oſculantes, *ideſt maximi, qui ad datum punctum curvæ inſcribi poſſint.* (67) Centra *varia, ex quibus curvę deſcribi poſſunt ope filorum*, (68). Foci *tum indiviſibiles, tum lineares earundem curvarum.* (69) Curvę Causticæ *ſive ex reflexione, ſive ex refractione radiorum lucis progenita, quas ſcilicet iidem radii perpetuò tangunt.* (70) Cycloides *orta ex quavis curva ſuper quamlibet aliam rotata; Item* (71) *Curvę* ex Evolutione *fili aliam curvam circunplectentis, more Hugeniano, generata &c.* [72] Joannes, & Jacobus Bernoullii *fratres, ille Chroninga, hic Baſilea Mathem. Profeſſores longè clariſſimi.* (73) Guglielmus Franciſcus Marchio de Hoſpitalio *inſignis Geometra, qui methodum infinitè parvorum preclara Analyſi* Des infiniment petits *illuſtravit.* (74) Ehrenfridus VValtherus de Tſchyrnhauſen *celeberrimus Mathematicus, auctor Medicinę mentis & corporis, atque ingentium Vitrorum Cauſticorum inventor.* [75] D. Facio De Duilliers (76) Acta Eruditorum Lypſiæ *ab anno* 1682. *& deinceps publicata, in quibus alia complura huc pertinentia occurrunt, quæ, brevitati ſtudentes, omittimus, cùm hactenus adducta, commendando methodi hujus pretio, abundè ſufficiant* (77) *At* Bernardus Nieuventiit *in Analyſi Infinitorum anno* MDCVC. *edita hunc ulteriorem in infinitè parva progreſſum reiicit & improbat.* (78) *Nam Infinito quidpiam addi poſſe negat,*

Rerum etiã minima (79) admittit, quæ prima vocantur,
[80] Decrementa ſed his ulteriora negat.
At tu, (81) Antennoreæ mox Palladis ornamentum,
[82] *Hermanne* huic cauſæ porrigis ultor opem,
Et repetita (83) Viri eximii argumenta refellens,
Magna et Parva [84] omnes cogis habere gradus.
Sola (85) *Varignonii* PLUSQUAM-INFINITA moratur,
Quæ ſpatiis tribuit *VVallis* hyperbolicis.
Ille etenim (86) abſurdũ quiddã, atque affine Chymeræ
Sub tam magnifica voce latere putat.
Tu quoque derides nomen tam grande (87) *Parent*,
Et Geometrarum è claſſe [88] valere jubes.
Si tamen aſpiret cœptis fortuna ſecundis,
Et regat hæc trepidum lubrica arena pedem,
Dogmata [89] *VVallisii* per me inconcuſſa manebunt,
Stabit hyperbolicis (90) multiplus ordo locis.
Parvorum tamen omne genus, [91] variaſque deinceps
Magnorum claſſes, ante referre juvat, Fon-

gat, ac quadratum, cubum, cæteroſque gradus Infiniti numeri reſpuit (79) unde & conſequenter, primas quidem differentias, ſeu partes infinitesimas primi gradus admittit; ſed (80) ulteriorem differentiationem, ideſt ſecundas, ac tertias differentias procul ablegandas cenſet. At (81) qui nunc Urbis Patavinæ ab Antennore fundatæ Cathedram Mathematicam *moderatur* (82) Jacobus Hermannus *Baſileenſis, variis geometricis Speciminibus in Actis Lypſiæ, & in Ephemeridibus Pariſienſibus, ſuo merito, celebratus, calculi infinitesimalis cauſam ultus eſt, & [83] libro, adverſus Conſiderationes ſecundas* Nievventytii, *anno* 1700 *Baſileæ promulgato, (84) ad omnem dignitatem evehi poſſe tum infinitè magnas, tum infinitè parvas quantitates oſtendit.* (85) *Scrupulum tamen iniecere* D. Varignonio *Spatia* Pluſquam-Infinita, *quæ VVallisius inter hyperbolas altioris gradus agnovit; hæc ſiquidem* (86) *neſcioquid contradictionis involvere Varignonius credidit:* Un plusque infini, *inquit in monumentis Acad. Regiæ anni* 1706. m'a toujour paru' renfermer une contradiction (87) *Sed et* D. Parent *part.* 3. *Diſquiſ. Phyſ. & Mathem. novam hanc* Pluſquam Infinitorum *denominationem à Geometris exulare cupit:* cel'a etant, adieu nos plus qu' Infinis. *Deo tamen auſpice* (89). *Doctrinam VVallisii hoc in propoſito vindicandam ſuſcipiemus, & [90] multiplicem illum Infinitorum ordinem in ipſis hyperbolis, quas VVallisius conſideravit, neceſſario admittendum demonſtrabimus: atque hic præcipuus erit noſtræ hujus tractationis ſcopus,* (91) *tametſi, ad uberiorem ſcientiam, multò generaliùs hoc ipſum argumentum* De Infinitis Infinitorum, & Infinitè

 Par-

Fontibus (92) è propriis fluat ut tam nobile Verum,
Atque hauſtu recreet liberiore ſitim.
Hinc lux [93] uberior, vis firmior, amplior uſus
Accedit methodis, præſidiumque novis.
Nec jam deſpicies, (94) quòd tangens ſuppleat arcus,
Aut curvæ areolæ Zonula recta vicem,
Et laterum innumera ſerie (95) polygonon habebis,
Flexa ubi continuum linea ducit iter:
Plurimaque (96) in Phyſicis rerum miracula diſces,
Invenient certam jam paradoxa fidem:
Totũ Animal minimi ut tegit ovi anguſta (97) cicatrix,
Integra ut exiguo in ſemine Planta latet.
Explicat implicitas (98) tantùm generatio partes,
Auctio diſtendit, perficit, ornat opus:
Nec, quæ ſuccedunt priſcis [99] nova ſemina, terrent,
Dum renovant fructus tempus in omne ſuos.
Nam ſumme exiguis (100) ſine fine minora, per omnes,
Ad ſenſum veniunt, ducta ſubinde gradus.
Increpat inſueti ſed Apollo carminis auſum,
Noſtra jubens, poſita, ſumere ſigna, chely.

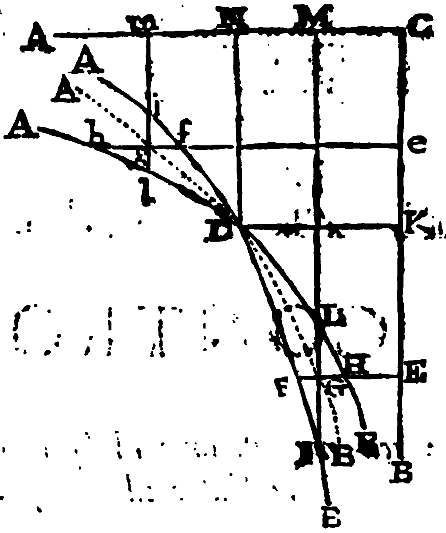
Parvorum Ordinibus *verſare*, (92) *& ipſos hujus doctrinæ fontes aperire curabimus*, (93) *ad novas methodos illuſtrandas, & confirmandas*. (94) *Licebit deinceps arcum infinitè parvum pro recta ejus tangente ſumere, & curvarũ* (95) *quadrilinea infinitè parvę latitudinis pro rectangulis inſcriptis, aut circumſcriptis computare: ipſaſque curvas pro* (96) *polygonis infinitorum numero laterum ſummè exiguorum habere* (*ut Galilaus, ante omnes de Circulo hoc propoſuit*). *Multa etiã* (97) *quæ in Philoſophia paradoxa videbantur, credibilia fient, ut Animalis in Ovo, & Plantæ in Semine pręexiſtentia cum omnibus organicis partibus, quæ* (98) *evolvantur dumtaxat per generationem, & per nutritionem amplientur*. (99) *Nec terrere nos debet ſeminum, & fructuum, quovis anno prodeuntium, multiplicitas*: *Nam* (100) *admiſſis variis infinitè parvorum ordinibus, concipere poſſumus, omnia in ſemine contenta ex uno ad alium gradum ſubinde promoveri: ut nempe dum ad ſenſibilem magnitudinem perveniunt quæ erant in primo gradu infinitæ parvitatis, ſuccedant ad hunc primum gradum quæ erant in ſecundo, & ad ſecundũ quæ erant in tertio, & ſic deinceps. Quod valet etiam de Plantulis, que in ſeminulis primo ſemine contentis latent cum ſuis infinities adhuc minoribus ſeminulis, continentibus plantulas alias infinities minores, atque ita in infinitum.*

EXPOSITIO
CONTROVERSIÆ

Circa magnitudines Pluſquam-infinitas, quæ præſentis tractatus editioni præbuit occaſionem.

CEleberrima eſt ſpatiorum pluſquam infinitorum, quæ in hyperbolis altiorum graduum ſupra Apollonianam, ad alteram aſymptoton remanent, conſideratio. Hanc denominationem illis inditam voluit ante omnes alios Cl. VValliſius *Arithmet. Infinit. prop.* 104. 105. *&c. & in Mechan. cap.* 4. *prop.* 7. Quod ipſum & nos, *Hugenian. cap.* 4. *n.* 12. ab eodem VValliſio optimè obſervatum tradidimus, & poteſt ex his, quæ *ibidem cap.* 8. *n.* 11. generatim oſtendimus, facillimè demonſtrari.

Nimirum ex ibi dictis patet, quòd ſi inter aſymptotos A C, C B ſit hyperbola Apolloniana A g D G B, cujus nempe ea ſit proprietas, ut ratio quarumvis ordinatarum D K, G E, ſit æqualis rationi abſciſſarum à centro reciprocè ſumptarum E C, C K, erit ſpatium poſt quamlibet ordinatam D K, aſymptoto K B, & curva D G B indefinitè productis interjectum, magnitudinis abſolutè infinitæ, quippe quæ ad inſcriptum parallelogrammum C K D N erit ut 1 ad 0, quę ratio eſt infinitè magna, ſeu major qualibet aſſignabili.



Sin autem talis hyperbola A h l D L H B iiſdem aſymptotis per idem punctum D inſcribatur, cujus ordinatarum D K, H E ratio ſit duplicata rationis abſciſſarum reciprocè ſumptarum E C, C K: nempe cujus ordinatæ ſint ut quadrata dictarum diſtantiarũ reciprocè accepta: tunc ſpatium poſt ordinatam K D, aſymptoto K B, et curva D H B ad partes B infinitè productis interiectum, præcisè æquabitur eidem parallelogrammo C K D N, quippe ad illud erit ut 1 ad 1. Et ſi ordinatarum ratio reciprocæ rationis abſciſarum triplicata foret, adeòut illæ harum cubis è contrario reſponderent, haberetur hyperbolicum ſpatium poſt ordinatam K D ſimiliter ad partes B in infinitùm excurrens, ſubduplũ ejuſdem parallelogrammi C K D N. Atque ubi ordinatarum ratio reciprocæ abſciſſarum rationis quadruplicata foret, prodiret ſpatium illud hyperbolicum ſubtriplum hujus parallelogrammi, atque ita in reliquis procedendo. Adeo

Adeout generatim ſi ratio ordinatarum ſit ad reciprocam rationem abſciſſarum, ut x ad y (vel, quod eòdem redit, ſi ordinatarum poteſtates, ab exponente y denominatæ, reſpondeant reciprocè poteſtatibus abſciſſarum ab exponente x indicatis) ſemper ſpatium hyperbolicum poſt unam ordinatam, aſymptoto et curva in infinitum productis interjectum, reperiatur eſſe ad inſcriptum parallelogrammum, ut y ad $x - y$: Sic enim in prima Hyperbola Apolloniana, ubi utraque ratio, tam ordinatarum, quàm reciproca abſciſſarum, æquatur, adeoque y ad x eſt ut 1 ad 1, erit ſpatium hyperbolicum ad parallelogrammum, ut 1 ad 1 − 1, ſive ut 1 ad 0. In ſecunda hyperbola, in qua prima ratio eſt duplicata ſecundæ, fiet x ad y ut 2 ad 1, & proinde ratio ſpatii hyperbolici ad parallelogrammum, ut 1 ad 2 − 1 ſive ut 1 ad 1. Ubi verò prima ratio ſit triplicata ſecundæ, adeò ut y manente 1, x evadat 3, erit ſpatium ad parallelogrammum ut 1 ad 3 − 1, ſive ut 1 ad 2, atque ita deinceps.

Adeòque cùm hæc lex ſemper obtineat, utpotè fundata in ratione ſubtangentium, quæ ſemper ſunt ad diſtantias ordinatarum a centro, ut exponens poteſtatis ordinatarum y ad exponentem poteſtatis abſciſſarum x (ſive ut harum ratio ad rationem illarum) per dicta Hugenianorum *cap.* 7. *n.* 9. conſequens eſt, ut in hyperbolis AFDFB, ſi viceverſa abſciſſarum EC, CK ratio duplicata, aut triplicata fuerit reciprocæ rationis ordinatarum KD, EF, utpotè ſi harum quadrata, vel cubi &c. ſint reciprocè ut diſtantiæ earundem à communi centro (quod in iiſdemmet hyperbolis ſupra conſideratis evenit, ſi modò ad alteram aſymptoton referantur, ut diſtantiæ in ordinatas, & ordinatæ in diſtantias mutentur, adeoque y ad x ſit ut 2 ad 1, vel ut 3 ad 1, &c. etiam ratio hyperbolici ſpatii poſt unam ex dictis ordinatis juxta ſuam aſymptoton, cum ipſa curva, infinitè productam extenſi, ad inſcriptum

paral-

parallelogrammum erit, ut y ad $x-y$ hoc eſt ut 2 ad 1 − 2 (nempe ut 2 ad − 1, ſive ut 1 ad $-\frac{1}{2}$); vel ut 3 ad 1 − 3 (ideſt ut 3 ad − 2, ſive ut 1 ad $-\frac{2}{3}$) & ſic de aliis; quæ ratio cùm major ſit ratione 1 ad 0 (ob conſequens minus, quàm 0) ſitque 1 ad 0 ratio ſimpliciter infinita, conſtat majorem rationem ſpatiorum, de quibus loquimur, ad inſcripta parallelogramma eſſe *pluſquàm infinitam*; & ideò dicta ſpatia meritò à Cl. VValliſio *pluſquaminfiniti* nomine fuiſſe appellata.

Nuperrimè tamen ſcrupulum ſuper his in Gallia ſubortum intelleximus; Nam anno 1700 D. Carrè *in methodo menſuræ ſuperficierum &c. ſect. 1. coroll. prop.* 23. cùm intuliſſet, ſpatia hyperbolica, quorum index poteſtatis ordinatarum *m* ſit minor unitate accepta pro exponente diſtantiarum a centro, eſſe *pluſquam infinita*: in margine monuit, ſe ita appellaſſe, ne à communi, & vulgari loquendi modo recederet, cæterùm à nonnemine opportunam rei hujus explicationem propediem expectandam: *c' eſt pour parler le langage ordinaire, que je me ſers du mot de* plus qu'infini. *Une perſonne doit nous donner au premier jour un éclairciſſement ſur cette matiere.*

Tum anno 1705 D. Parent *in Diſquiſit. Phyſ. & Mathem. tom. 1. part.* 3. *pag.* 552. hunc ipſum locum D. Carrè ad cenſuram vocans, poſtquàm ejus calculum reformare aggreſſus eſt, noſtrum hoc pluſquam infinitorum genus, per jocum, valere jubet: *cela étant, adieu nos plus qu' infinis:* & velut ægrè tulerit vel denominationem illam, quaſi *vulgò uſurpatam*, à D. Carrè indicari, quam, utcumque magnificam, novam tamen, aut ſaltem inutilem eſſe ſibi perſuadet; hæc ſubdit: *Mais quelle utilité tirerons nous de ces grands & nouveaux termes, qu' on nous donne pour des termes triviaux?*

Tan-

Tandem anno 1706 Cl. Varignonius expreſsè VVallifium hac in re ſibi confutandum propoſuit *in Monum. Phyſ. & Mathem. Regiæ Academiæ Pariſienſis die tertia Februarii ejuſdem anni*: Poſtquàm enim retuliſſet, laudatum Scriptorem Anglum, dum ſpatia, quæ hyperbolis, & ipſarum aſymptotis interiiciuntur, ad menſuram vocat, ob dimenſionem quorundam ex his ſpatiis per negativas magnitudines expreſſam, eadem *pluſquàm infinita* credidiſſe, ſubdit: „ ſibi magnitudinem pluſquam infinitam neſcio quid cnotradictionis ſemper includere viſam fuiſſe; unde ad inquirendam myſterii hujus enodationem excitatum eſſe: atque omne myſterium evaneſcere debere confidit, ubi oſtenderit, Authoris hujus expreſſionem pro ſpatio pluſquam infinito, ne quidem ſpatio ſimpliciter utcunque infinito competere, ſed tantùm finito, quod quidem ſpatium verè infinitum ad alteram partem reſiduum compleat; adeòque hyperbolas cum aſymptotis ſuis non comprehendere ſpatia pluſquam infinita, ut Author ille contendebat: atque hanc demum eſſe explicationem illam, quam D. Carrè in ſuo Libro de Calculo integrali ſuper hac materia prodituram (ante ſex annos ſcilicet) promiſerat „ En ejus verba, uti habentur in dictis Academiæ monumentis anni 1706. *pag.* 15. editionis Amſtelædamenſis.

Monſieur VVallis cherchant la meſure des Eſpaces renfermez par des hyperboles, & leurs aſymptotes, & aiant trouvè pour l' expreſſion de quelques-uns de ces Eſpaces des grandeurs negatives, a crù qu' ils ètoient plus qu' infinis. Mais comme un plus qu' infini m' a toùjour parù renfermer une contradiction, cela m' a determinè à chercher le dènouement de ce myſtere, qui ceſſera d' en ètre un, dès que j' aurai fait voir que ce que cet Auteur prend pour l' expreſſion d' un Eſpace plus qu' infini, n' eſt pas mème celle d' un infini, mais ſeulement d un Eſpace fini, qui eſt à la veritè le complement d' un Eſpace infini; & qu' ainſi les hyperboles, & leurs aſymptotes ne renferment point d' Eſpaces plus

qu' in-

qu'infinis, comme cet Auteur l'a pretendu. C'eſt là l'eclairciſſement qui a été promis dans le Livre de M. Carré ſur le Calcul Integral.

Hinc poſt traditam doctrinam ſuam de quantitatibus negativis, non magnitudinem pluſquam infinitam in hoc propoſito denotantibus, ſed prorſus finitam, ad partes tamen contrarias de more accipiendam, concludit. „ Tantum abeſſe, ut hyperbolæ altioris ordinis ſupra Apollonianam ſpatium pluſquam infinitum comprehendant, quòd potius ipſius Apollonianæ hyperbolæ ſpatium cenſeri poſſit magis infinitum ſpatio ab aliis comprehenſo, quippe illud ex utraque parte, hoc verò ab una duntaxat parte infinitum deprehenditur „; ait enim: *D'où l'on voit que l'eſpace ACBFA* (hyperbolæ nimirum ordinariæ in ſuperiori figura) *doit être infini de part & d'autre; & par conſequent plus infini [pour ainſi dire] que les précédens ACBEFA, & ACBBHA* (aliarum nempe hyperbolarum) *qu'on vient de voir ne l'être, que par chacun un côté. Donc il s'en faut bien qu'ils ne ſoient plus qu'infinis.*

Nos autem Cl. VVallisii doctrinam, & expreſſionem vindicantes, oſtendemus, revera hyperbolas altioris ordinis ſupra Apollonianam, ex una parte licet finitum ſpatium comprehendant, ex alia tamen uſqueadeò ſpatium pluſquam infinitum continere, ut etiam infinities majus ſit ſpatio ab Apolloniana hyperbola contento: adeout ſpatium Apollonianæ hyperbolæ, licèt utraque ex parte jam infinitum, quantumvis adhuc multiplicatum, ſemper minus oſtendatur quovis ſpatio ad unam aſymptoti partem ab altioribus aliis hyperbolis contento, & quâlibet etiam aliquota ipſius parte: ac demum ita comparari debere ſpatium infinitum hyperbolæ Apollonianæ ad ea ſpatia, quæ ab altioribus comprehenduntur, ut quædam finita quantitas ad infinitam, vel ut o ad 1. Uſque adeò verum eſt, ſpatia illa pluſquam infinita cenſeri debere, & VVallisianam

nam

nam illam denominationem, velut optimo fundamento nixam ſubſiſtere, meritòque adhuc ab omnibus eſſe retinendam.

Enimverò hoc ipſum, quod nos de ſpatiis illis hyperbolicis demonſtraturos recepimus, ſufficere, atque illud unū requiri, ut ſpatium quoddam pluſquam infinitum habeatur, faſſus eſt Auctor Hiſtoriæ ejuſdem Academiæ Regiæ anni 1706 in hujuſmet controverſiæ enarratione, & Varignonianæ diſſertationis recenſione, optimè animadvertens: „ Pluſquam infinitam non cenſeri magnitudinem, quæ alia infinita utcunque ſit major, cùm infinitæ magnitudines, juxta quorumvis numerorum rationem, aliæ aliis majores, aut minores eſſe poſſint, abſque eo quòd ordinem infinitorum excedant, perinde ac finitæ quantitates juxta quamvis rationem auctæ, vel imminutæ, finitorum ordinem non tranſcendunt; ſed illas pluſquam infinitas magnitudines demum cenſendas, quæ ab infinitorum ordine emergentes, ad ordinem ſuperiorem fuerint elevatæ, ut accidit finitis magnitudinibus, ubi ad ordinem infinitorum tranſierint. „ En ipſa eloquentiſſima verba Hiſtorici prælaudati *pag.* 60. Batavæ editionis: *Car ce qu' on nomme ici plus qu'infini, ce n' eſt pas une grandeur infinie plus grande qu'une autre infinie: les grandeurs infinies peuvent ètre plus grandes ou plus petites les unes que les autres, ſelon tous les rapports poſſibles des nombres, & cela ſans ſortir de l' ordre de l' infini, de meme que les grandeurs finies ne ſortent pas de l' ordre du fini pour varier entr' elles ſelon tous ces rapports. Mais ce qu' on entend par des grandeurs plus qu' infinies, ce ſont des grandeurs qui etant ſorties de l' ordre de l' infini doivent s' elever à un ordre ſuperieur, comme font les grandeurs finies lorſqu' elles paſſent à l' ordre de l' infini.*

Idipſum & Auctor Diarii Pariſienſis *in ſuplemento ultimi Februarii* 1708, hanc hiſtoriam, & controverſiam recenſens, repetit totidem penè verbis: deinde adjicit „ Quòd ſi pluſ-

quàm infinitæ magnitudines admittantur, ordo quidam altior ipſomet infinito erit excogitandus, atque inducendum, non modò unum infinitum ſimpliciter alio majus, ſed genus quoddam magnitudinum, quæ infiniti ordinem prætergreſſæ ad ſuperiorem alium ordinem eleventur „ *Si ce, qu'on appelle dans cet article* Grandeurs plus qu'infinies, *avoit lieu, il faudroit reconnoiſtre un ordre plus elevé que celui de l'infini, & admettre non pas ſimplement un infini plus grand qu'un autre, mais des Grandeurs ſorties de l'ordre de l'infini, & elevées à un ordre ſuperieur*. Tum notabilem hanc animadverſionem ſubiicit, quâ „ non omnino reiiciendas pluſquàm infinitas magnitudines (adeòque nullam contradictionem, qualem in ipſis Varignonius fingit, abſolutè involvere) ex Geometriæ tranſcendentis principiis, varios infinitorum ordines agnoſcentis, apertè innuit: verùm in hoc ſpeciali propoſito hyperbolarum VValliſii, omne pluſquam infinitum jure à Varignonio reiici ſtatuit, quippe illarum expreſſio à VValliſio adducta, ne quidem pro ſimpliciter infinito, (nedum non pro pluſquam infinito) ſed purè finito ſpatio fuerat accipienda „ *Quand les principes de la Geometrie tranſcendante ne permettroient pas de rejetter abſolument l'idée de differens ordres d'infinis, M. Varignon auroit toujours raiſon de la rejetter dans la queſtion preſente. Et en effet il fait voir, que ce que M. VVallis a pris pour l'expreſſion d'un eſpace plus qu'infini, n'eſt pas même l'expreſſion d'un eſpace infini; l'eſpace exprimé etant purement fini.*

Me igitur operæ pretium facturum exiſtimavi, ſi rem ipſam altiùs repetens, varios tum Infinitorum, tum infinitè parvorum ordines, quos profundior Geometria, quæ nunc temporis in uſu eſt, ac per infinitè exigua magnitudinum elementa procedere ſolet, ex omnium fermè Geometrarum, qui ejus principia deguſtaverint, confeſſione agnoſcere neceſſariò debet, demonſtrare, & quàm dilucidè fieri poterit, exponere aggrederer, ſpeciatim verò Hyper-

per-

perbolarum VValliſii *pluſquam infinitorum* non unam, ſed multiplicem purè geometricam demonſtrationem in medium afferrem, quæ nullis Calculi ambagibus imponere cuiquam poſſit, nulliſque cavillationum technis eludi: adeò ut non magis excipere queat Varignonius, expreſſionem horum ſpatiorum invertendam, et ad aliam partem, negativo in poſitivum tranſeunte, ac pluſquàm infinito in purè finitum converſo, eſſe ſumendam, quàm ſi contenderet, quæ de Triangulis oſtendit Euclides, eſſe de Circulis, aut Parallelogrammis intelligenda.

Veniam, ut ſpero, dabit conatibus noſtris Cl. Varignonius, cujus præclariſſimæ famæ, quam ſibi tot mechanicis, ac geometricis, & analyticis egregiis ſpeciminibus, immortali planè memoria digniſſimis, peperit, nihil idcircò detractum volo, dum Collegæ noſtri VValliſii honorem, & Illuſtriſſimæ Regiæ Societatis noſtræ Decus, ac Veritatis ipſius pretium hac in parte vindicare contendo: ſimulque tum ipſe, tum profundiores alii Geometræ permittent, ut me vel Tyronum captui accomodans, doctrinam hanc minutiſſimè exponam, ea ipſa, quæ tamquam vulgatiſſima habentur, ex ſuis velut principiis exactè demonſtrans, ne quid fortaſſis obrepat, quod minùs aſſuetis ad hæc profundiora Matheſeos myſteria mentibus ullam falſitatis ſuſpicionem poſſit ingerere; liberum enim cuilibet futurum erit, ut ea quæ facillima, & ſibi notiſſima ſunt, ſtatim tranſiliat, atque in his dumtaxat, quæ propoſitæ controverſiæ punctū propiùs concernunt, examinandis, tempus inſumat.

Hortandus interim mihi eſt Lector Geometra, ne inter inanes, ac nulli uſui profuturas meditationes, noſtram hanc de Natura Infiniti, variiſque ejus claſſibus, quas pauci hactenus animadvertere, ac diſtinguere potuerunt, collocandam cenſeat; nam præter egregios fructus, quos probè inſtituta mens ex hujuſmodi conſiderationibus ad Divinorum contemplationem ſibi derivare facilè poteſt, qua-

tenus nihil æquè idoneum eſt in Dei Opt. Max. ejuſque ſummarum perfectionum notitiam (quantùm naturæ viribus aſſequi datur) nos promovere, atque in ejus incomprehenſibilis Sapientiæ, omnemque, vaſtam licèt, ac ultra quoslibet, terminos extenſam ideam, immenſo intervallo ſuperantis Potentiæ admirationem inducere, ac ſeria Infinitorum diſcuſſio: præter hos, inquam, egregios ſanè, ac præſtantiſſimos fructus, alioſque non abſimiles ad vitam rectè, moderatèque inſtituendam pertinentes, quibus vel ſolis quidquid ad Infiniti Naturam enucleandam, ejuſque proprietates aperiendas collimat, ſatis commendaretur, innumera ex eodem hoc fonte in univerſam Mathematicam, & Philoſophiam profluere emolumenta is unus diffiteri poterit, qui iiſdem percipiendis impar extiterit; Nam, exempli cauſa, Circuli, & Hyperbolæ quadratura, quæ tot modiis tentata, quoslibet Geometrarum conatus per tam multa ſæcula pertinaciter eluſit, tandem ab infinita terminorum ſerie pendere deprehenſa eſt, ut in noſtro Libello *Quadratura Circuli, & Hyperb.* anno 1703 Piſis edito geometricè demonſtravimus. Innumeri naturales effectus in Phyſica adhuc ignoti manent, quòd infinitam principiorum ſeriem, à qua fortaſſe dependent, ignoremus. Tota Geometria Infinitè parvorum methodo nunc perficitur, & in immensùm ultra fines à Veteribus conſtitutos ampliatur: perfectioni autem tam nobilis Scientiæ connecti et perfectionem Philoſophiæ, atque hanc pari paſſu cum illa in dies promoveri, quis neſciat? Verùm hęc alibi fuſiùs, & opportuniùs: ad rem ipſam veniamus.

DE INFINITIS INFINITORUM, ET INFINITE PARVORUM ORDINIBUS.

DEFINITIO I.

R*ATIONES aſſignabiles dicuntur, quibus æquales, aut quamlibuerit proximas, per poſitivos numeros, poſſumus exhibere.*

SCHOL. Comprehendit hæc definitio etiam rationes aſymetrarum magnitudinum, ut diametri ad latus quadrati, vel lateris trianguli æquilateri ad ejus perpendiculum &c. quæ licèt numeris exprimi nequeant, oſtenduntur tamen quibuſdam numericis rationibus majores, quibuſdam minores, adeòque intra certos limites continentur, intra quos etiam poſſumus propoſitæ rationi quamlibuerit proximam per numeros exhibere, juxta ea, quæ demonſtravimus *in Hugenianis cap.* 3. *n.* 3.

DEFINITIO II.

Magnitudines abſolutè Finitas voco, quas vulgò tractamus, quæque ad ſimilem nobis notiſſimam quantitatem, in noſtro ſaltem corpore determinandam, rationem aſſignabilem obtinent.

SCHOL. Quaslibet magnitudines digito, palmo, pede, vel ulna, nimirum humani corporis partibus, ad certam quandam mediocrem quantitatem, inter tot varias, publica auctoritate, taxatis, metiri omnis natio conſuevit: itaque eodem modo ad corporis noſtri molem cætera corpora, ad noſtrā ſuperficiem cæteras ſuperficies, ad noſtram altitudinem cæteras lineas, ad angulum, quem altitudo noſtra cum horizontali recta comprehendit, cæteros rectilineos angulos, ad noſtrum pondus cæterarum rerum gravitates, ad noſtram vim cæteras potentias, ad noſtræ vocis tenorem cæteros ſonos, atque ita de reliquis, referre non immeritò poſſumus, velut ad magis obviam, magis naturalem, nobiſque notiſſimam menſuram, ad quam certè quælibet finitæ quantitates ejuſdem generis, quas vulgò tractamus, aſſignabilem aliquam obtinent rationem.

DEFINITIO III.

Magnitudinem abſolutè Infinitam voco, quæ ad finitam quamlibet ſui generis magnitudinem rationem habeat majorem qualibet aſſignabili.

SCHOL. Non contendimus, talem aliquam magnitudinem in ipſa exiſtere, vel aliquando extituram, ſed ipſe progreſſus quantitatum, certa quadam lege, creſcentium, menti noſtræ occaſionem præbet, illas ſine limite augendas, & ultra quamvis datam magnitudinem ampliandas concipiendi, quarum itaque ratio ad quamlibet finitam ſui generis quantitatem, major ſemper, & major evadat, quàm quælibet

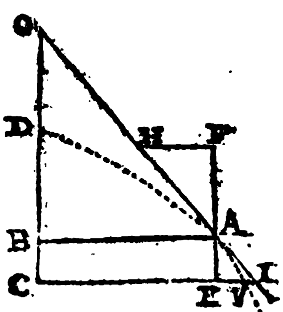
libet

libet ratio aſſignabilis: ita conica ſuperficies, ejuſque ſectiones parabolicæ, & hyperbolicæ, ſuapte natura infinitæ ſunt, quatenus ſemper augeri, extendique ulterius, adeoque omnem finitam ſuperficiem ſuperare concipi poſſunt; licèt interim quidquid ex illis determinatè acceperimus, ſemper nonniſi finitum futurum ſit, in eo autem dumtaxat, quod accipiendum ſupereſſet, tota Infinitas lateat. Neque enim fieri poteſt, ut magnitudo undique circumſcripta, & limitata, pro abſolutè infinita habeatur: quare licèt parabolæ, exempli cauſa, axis in infinitùm protenſus ſit abſolutè infinitus, non ideò concipi poteſt, velut longitudo binis punctis, quantumvis diſtantibus, intercepta, ſed ex una dumtaxat ſui parte, nempe ad punctum verticis, unde originem ſuam ducit, determinata, ad aliam verò partē termino, & fine carens, utpotè ſine limite ſemperaugenda.

DEFINITIO IV.

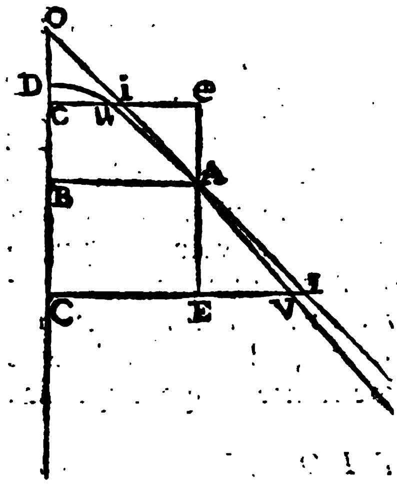
Magnitudines abſolutè infinitè parvas intelligo illas, quæ ad finitam ſui generis magnitudinem habent rationem minorem qualibet aſſignabili.

SCHOL. Has magnitudines infinitè parvas Cl. D. Leibnitzius *Differentias*, vel Elementa variabilium quantitatū vocavit: Illuſtriſs. Eques Nevutonus *Fluxiones*, ſeu momentanea incrementa, aut decrementa magnitudinum, continuo quodam fluxu creſcentium, aut decreſcentium, antea appellaverat: Multis placet eaſdem *Infiniteſimas* magnitudinū partes dicere; quæ ut intelligantur, concipiatur recta BA per axem DC curvæ DAV, ſibimet parallela manens, moveri, atque interim continuò creſcat, aut minuatur, prout opus eſt, ut



ad

ad curvæ perimetrum altero extremo pertingat; ducta ergo A E axi parallela, ſi imaginemur [licèt, ad confuſionem vitandam, has aliquantulum diſsitas figura exprimat] ordinatam B A veniſſe in ſitum, quàm maximè intelligere poſſimus, eidem proximum, & jam congruere rectę C V: ejus incrementũ, aut decrementũ V E erit differẽtia infinitè parva ordinatæ B A, ſimiliterque arcus A V differentia erit infinitè parva curvæ D A V, itidemque erit B C differentia infinitè parva axis D B, nec non areola A B C V, duabus ordinatis infinitè proximis intercepta, dicetur differentia infinitè parva areæ D A B; manifeſtum enim eſt, poſſe concipi, ut tam prope accedant invicem ordinatæ B A, C V, ut ratio tam E V ad B A, quàm C B ad B D, nec non V A ad A D, & ſpatii A B C V ad A D B, minor evadat quavis propoſita ratione aſſignabili; minuitur enim hoc continuo acceſſu ordinatarum A B, C V, quælibet ex dictis quantitatibus E V, C B, V A, A B C V in infinitum, ac tandem penitus evaneſcit, ubi utraque ordinata perfectè congruit; quare priùs oportet, ut minor fiat qualibet finita ſui generis magnitudine aſſignabili, ideoque ad datum conſequens rationem ſubinde acquirat, in hoc continuo fluxu, minorem qualibet aſſignabili. Similiter rotata curva D A V circa axem D C, oſtenderetur, rotundæ ſuperficiei per curvæ rotationem genitæ differentiam, ab arcu A V infinitè parvo procreatam, eſſe pariter infinitè parvam; nec non rotundi ſolidi portionem, planis per B A, & C V infinitè proximis æquidiſtanter ductis interceptam, eſſe infinitè pariter exiguam, &c.



Cæ-

Cæterùm hìc pariter obſervandum eſt, nec magnitudines has infinitè parvas concipi debere, velut determinatas, aut determinabiles quaſdam portiones quantitatum, quæ certam, & definitam parvitatem obtineant; quaſcumque enim portiunculas linearum, ſuperficierum, aut corporum (itidemque virtutum, celeritatum, angulorum &c.) acceperimus, aut deſignaverimus, hæ ſemper reipſa finitæ erunt, non infinitè parvæ: itaque non ſunt intra certos terminos, quantumvis proximos, coarctandæ, ſed concipiendę ſunt ex una dumtaxat parte, ad ſummùm, limitatæ (ut CB fixum terminum habet in B, VA fixam originem habet in A, area BAVC adiacet fixæ lineæ AB, & corpuſculum, ex illius converſione circa BC deſcriptum, adhæret fixo circulo radii BA) ex altera verò parte fixum limitem non habentes, ſed alteri extremo ſemper propiùs accedentem, ut continuo fluxu accedit punctum C ad B, & V ad A, & CV ad BA, intervallo utriſque interpoſito, infra quamlibet aſſignabilem magnitudinem, perpetuò decreſcente. Aut etiam utrumque extremum ſibi invicem accedere concipi poteſt, ut puncta E, V ſibi ſemper propiora fiunt, neutro fixam poſitionem ſervante, dum lineolam EV infinitè parvam intercipiunt. Unde hæ magnitudines ſemper ut decreſcentes, ac perpetuò diminuendæ accipi debent, ut ſuo, infra omnem aſſignabilem quantitatem, decremento, ſub ratione infinitè parvarum, ſive infinitesſimarum partium intelligi poſſint.

DEFINITIO V.

Duarum quantumlibet magnitudinum, ſi prima ad ſecundam habuerit rationem majorem qualibet aſſignabili, adeòque, convertendo, ſecunda ad primam ſit in minori ratione, quàm qualibet aſſignabilis, dicetur prima infinita reſpectu ſecundæ, ſive infinities maior illa: ſecunda verò infinitè parva reſpectu primæ, aut infinities minor eadem.

SCHOL. Hoc modo etiam finitæ magnitudines reſpectu quidem abſolutè infinitarum erunt infinitè parvæ, at reſpectu earum, quæ ſunt abſolutè infinitè parvæ, erunt ipſæmet infinitæ; Quare patet, nomina hæc *Infiniti*, aut *Infinitè parvi*, relativa potius eſſe, quàm abſoluta, licèt communi loquendi modo obſecundans, *in Defin. III. & IV.* abſolutè acceperim hæc vocabula, quia tunc reſpectus ſaltem ad ordinarias finitas quantitates ſubintelligebatur; quemadmodum etiam *Magnum & Parvum* termini ſunt ſemper relativi, ſed quoties ad ordinariam, & magis communem alicujus generis menſuram referuntur, abſolutè ſolent enunciari, magnus aut parvus homo, magnus aut parvus canis, magna vel parva domus, ſubintelligendo reſpectu hominis, canis, aut domus mediocris, & magis uſitatæ quantitatis.

DEFINITIO VI.

Ejuſdem inter ſe ordinis, aut gradus magnitudines ſunt, ubi earum ratio eſt aſſignabilis: Cùm verò hujus ad illam major, aut illius ad hanc minor eſt ratio, quàm quælibet aſſignabilis, tunc gradus, aut ordinis hæc ſuperioris, illa inferioris dicatur reſpectu alterius.

SCHOL. Hinc ex quantitatibus Infinitè parvis, aut Infinitis, vel Finitis, primæ inferioris gradus ſunt reſpectu cæterarum, ſecundæ ſunt ordinis ſuperioris ad reliquas, tertiæ ſuperioris quidem gradus aut ordinis reſpectu priorum, at inferioris reſpectu ſecundarum: inter ſe autē ejuſdem ordinis aut gradus eſſe conſtat finitas quaslibet magnitudines. An verò magnitudines omnes abſolutè infinitæ, vel infinitè parvæ ſemper ejuſdem inter ſe ordinis cenſendæ ſint, an potius diverſi gradus in utroque hoc magnitudinum genere reperiri queant, id in præſenti diſquiſitione detegendum erit: Clariſſimis viris *Newtono*, *Leibnitzio*, utrique

Ber-

Bernoullio, *Hoſpitalio*, *Hermanno*, ipſiſque etiam *Varignonio* ſua conſtat diverſitas ordinis in infinitè exiguis, quippe fluxionum fluxiones, & differentiarum differentias ſecundas, tertias, quartas &c. in Geometriam invexerunt, ut ex ipſorum monumentis paſſim liquet; *Bernardus* autem *Nieuwentytius* in ſua *Analyſi Infinitorum*, non eſſe ultra primas differentias progrediendum, pluribus contendit, adeòque infinitè parvas magnitudines ad eundem ſemper ordinem ſpectare arbitratur. Iiſdem ſupra laudatis egregiis Viris (præter Varignonium & Nieuwentytium] placuiſſe, ut ordinis, & gradus diverſitas etiam inter quantitates infinitè magnas admitteretur, ex eorum modis, & loquendi formulis patet, ut ex celebri Leibnitzii dicto, *Actor. Lypſiæ pag. 86. Et infiniti ſunt gradus, tam infinitorum, quàm infinitè parvorum*; idque VVallisii præſertim exemplo factum eſt, qui omnium primus ſpatia *Pluſquàm infinita* in Hyperbolis altiorum graduum detexit: hæc enim nihil aliud ſunt, ut videbimus, quàm infinitæ magnitudines ſuperioris ordinis, quæ nimirum adhuc reſpectu quantitatum abſolutè jam infinitarum ſunt infinitæ, ſive illis infinities majores, quemadmodum differentiæ ſecundæ, vel tertiæ Leibnitii ſunt quantitates infinitè parvæ ordinis inferioris, ſive infinities minores ipſiſmet primis differentiis, quæ jam abſolutè erant infinitè exiguę. Et ſanè, mirum eſt, Cl. Varignonium *in monum. Acad. Reg. anni* 1706 hęc VVallisii ſpatia *pluſquam infinita*, velut contradictionem involuentia, reiicere, dum ſecundas, & tertias differentias, adeòque partes ipſiſmet infiniteſimis infinitè minores [quę *pluſquam infinitè parva* dici poſſent] tam frequenter admittit, ubi de viribus centralibus, de radiis oſculi, aliiſque ſimilibus diſſerit. Enimverò, nonne ipſę finitę quantitates infinities continent primas differentias, & hę rurſus infinities continent ſecundas, ſecundæ autem tertias? ergo multitudo ſecundarum differentiarum in ipſamet finita magnitudine

eſt pluſquam infinita, & tertiarum differentiarum multitudo in ipſis infiniteſimis primi ordinis pluſquam infinita eſt, infinities verò pluſquam infinita in magnitudinibus finitis, ac multò magis in quantitatibus abſolutè infinitis: adeò ut quævis magnitudo ſi continet infinitas numero primas differentias, utique contineat pluſquam infinitas differentias ſecundas, & in altiori adhuc infinitatis gradu contineat differentias tertias; & in multò altiori quartas, atque ita deinceps. Quidquid id eſt, non abs re fuerit, hypotheticè ſaltem, hoc vocabulum interim definire, ut certa, & diſtincta controverſę rei notio habeatur.

DEFINITIO VII.

Siquæ magnitudines infinities majores oſtendantur aliis magnitudinibus jam abſolutè infinitis, adeòque ordinis ſuperioris ad ipſas probentur, illæ PLUSQUAM INFINITÆ *poterunt appellari.*

SCHOL. Hoc enim nomen, ipſis à VValiſio quondam inditum, alii deinceps Clariſſimi Geometræ retinuerunt, ut Renatus Franciſcus Sluſius, David Gregorius, Joannes Craigius, & inter Gallos, quibuſcum nunc inſtituitur diſputatio, celeberrimus Marchio Hoſpitalius *in Tractatu Analytico Sectionum Conicarum lib. 5. prop. 14. coroll. 2. n. 3.*

Fateor tamen, quodlibet infinitum poſſe adhuc *pluſquam infinitum* cenſeri, quia cùm nullus ſit minimus infiniti gradus, quolibet infinito propoſito, ſemper aliud infinities minus reperiri poteſt, cujus reſpectu illud ſit pluſquam infinitum, ut conſtabit ex dicendis infra *prop.* 10, ubi ipſomet aſymptotico ſpatio hyperbolæ Apollonianæ (cujus reſpectu VVallifius altiores hyperbolas pluſquam infinitas cenſuit) aliam aream infinities minorem, licèt adhuc abſolutè infinitam, invenimus, cujus reſpectu ipſamet ordinaria hyperbola ſpatium pluſquam infinitum cum aſymptoto continet.

PROPOSITIO I.

MAgnitudinum ejuſdem ordinis A, & B, tam ſumma A†B, quàm differentia A−B (poſito nempe, quòd A, juxta aliquam aſſignabilem inæqualitatis rationem, determinatè ſit major, quàm B] ejuſdem pariter cum alterutra ipſarum eſt ordinis.

Erit enim, *ex defin. 6*, A ad B in aliqua ratione aſſignabili, putà *m* ad *n*: quare & componendo A†B ad B, & dividendo A−B ad B, erit in ratione pariter aſſignabili, *m*†*n*, vel *m*−*n* ad *n*, ideoque, *ex eadem definitione*, tam A†B, quàm A−B ejuſdem cum B, vel A, eſt ordinis. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM. Hinc finitum additum finito non facit infinitum: nec duæ, vel tres partes infinitè parvæ finitam magnitudinem aggregant: nec binæ, vel aliquot infinitæ quantitates ejuſdem ordinis ullam magnitudinem pluſquam infinitam ſupra talem ordinem efficiunt.

PROPOSITIO II.

PEr quemlibet finitum numerum m *quævis magnitudo A multiplicetur, aut dividatur, tam productum* m*A, quàm quotiens* $\frac{A}{m}$, *intra eundem ordinem cum ipſo A conſiſtet.*

Nam, *ex præcedenti*, A † A † A † A &c. quoties libuerit, ejuſdem ſemper cum ipſo A eſt ordinis; atqui multiplicatio, ut patet, non eſt niſi quædam repetita ejuſdem quantitatis additio, ergo productum *m*A ejuſdem ordinis erit cum ipſo A. Simili ratione $\frac{A}{m}$, multiplicatum per *m*, in-

tra eundem ordinem remanebit, ſed tunc evadit ipſum A, itaque $\frac{A}{m}$ ejuſdem eſt ordinis cum ipſo A; quare &c.

COROLL. Hinc non poteſt juxta finitum numerum toties ſumi quantitas infinitè parva, ut finitam quantitatem aliquando efficiat: idem dic de finita reſpectu infinitæ, ac de qualibet infinita reſpectu pluſquam infinitæ: idemque viciſſim de diviſione, ex qua numquam magnitudo ad inferiorem ordinem deprimitur, dictum eſto.

PROPOSITIO III.

SI ratio magnitudinum A ad C major ſit qualibet aſſignabili, non minor erit ratione 1 ad o.

Eſto ſiquidem minor, ſi fieri poteſt, puta eadem quæ 1 ad $\frac{1}{m}$ majorem quàm o (intelligendo per *m* quemlibet numerum, quantumvis magnum, qui dividendo unitatem, efficiat fractionem $\frac{1}{m}$ quantumlibet parvam) ergo quia eſt ut *m* ad 1, ita 1 ad $\frac{1}{m}$, erit ratio A ad C eadem quæ *m* ad 1, adeòque non major qualibet aſſignabili, contra hypotheſim; ratio igitur A ad C non minor eſt ratione 1 ad o. Quod erat &c.

COROLL. I. Qualibet magnitudo inferioris ordinis, collata magnitudini ordinis ſuperioris, ut merum nihil, in omni rigore, æſtimanda eſt; ſi enim illa ad iſtam compararetur, ut aliquid majus nihilo ad unum quidpiam, hæc haberet ad illam rationem minorem quam 1 ad o, cujus oppoſitum demonſtravimus.

COROLL. II. Et ideò nulla inferioris ordinis magnitudo addita magnitudini ordinis ſuperioris, vel ab eadem detracta, hanc auget, aut minuit, ſed ejuſdem quanti-

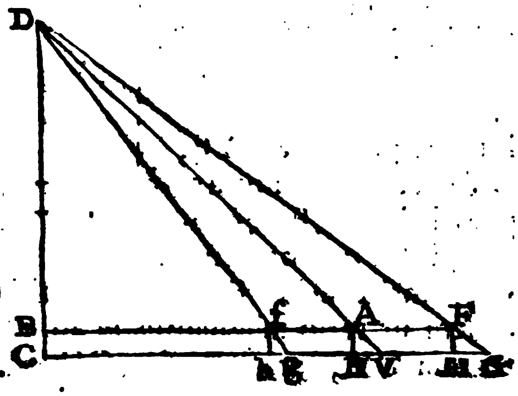
tita-

nitatis relinquit, ad ipſam enim comparatur, ut nihil ad aliquid, unde ſicut 1+o, & 1−o æquantur 1, ita finita quantitas per infinitè parvæ additionem, aut ſubtractionem, non creſcit aut minuitur, nec quantitas infinita per acceſſum, aut receſſum finitæ quantitatis, nec etiam (ſi quæ ſint) pluſquam infinitæ magnitudines augentur, aut decurtantur per magnitudinem, abſolutè quidem infinitam, ſed ordinis inferioris; ac in univerſùm, *magnitudines æquales cenſendæ ſunt, quæ magnitudine duntaxat infinities minori differunt*, ut in libello *Quadrat. Circ. & hyperb. ad Coroll. prop.* 17. dudum oſtendi, & in Scholio ibidem adjuncto generatim admonui, ad hunc ipſum tractatum reſpiciens, quem vel ex tunc adumbraveram.

PROPOSITIO IV.

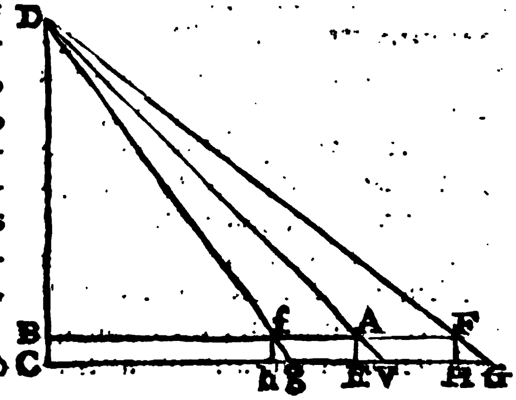
Q*Uantitatum infinitè parvarum, quædam ſunt ejuſdem ordinis, & quamlibet inter ſe rationem aſſignabilem habere poſſunt.*

1. Sit primò triangulum D B A, in quo D B æquetur B A, & huic parallela ducatur C V, ipſique propiùs accedere, atque infinitè proxima fieri intelligatur: quomodo tam B C (ſive A E illi æquidiſtans) quàm E V, infinitè parvæ evadent *ex defin.* 4. quippe ad finitas D B, aut B A rationem habere poterunt minorem quâlibet aſſignabili: ſemper tamen, ob ſimilia triangula D B A, A E V, erit B C, ſive A E æqualis E V, ut D B æqualis B A ponebatur. Quod ſi jam D B ad B F ſupponeretur habere aliam

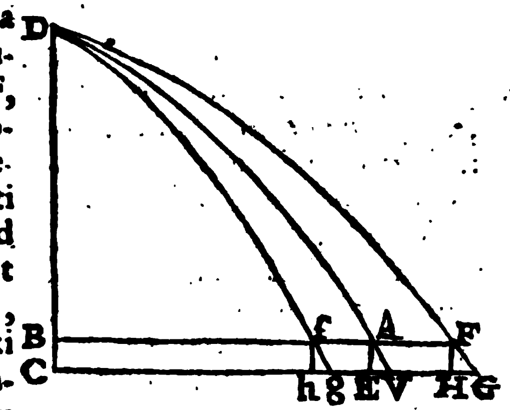


quam

quamlibet rationem, putà *m* ad *n*, juncta D F G, & ducta F H ipſi B C parallela, erit ſimiliter infinitè parva B C, vel F H ad infinitè parvam H G in eadem ratione aſſignabili *m* ad *n*, quam habent ipſæ D B, B F; quare in magnitudinibus infinitè parvis quælibet aſſignabilis ratio locum habere poteſt; Quod erat demonſtrandum.



2. Sit jam ſecundò circa axem D B quælibet curva D A V, & alia huic analoga D F G, cujus nempe ordinatæ B F, C G ad ordinatas prioris B A, C V ſint perpetuò in quavis conſtanti ratione aſſignabili *m* ad *n*. Si ergo, ut antea, fiant infinitè proximæ B A F, C V G, & ductæ ſint axi parallelæ A E, F H, conſtat, ipſas ordinatarum differentias G H, E V fieri infinitè parvas; & tamen cùm eadem ſit ratio aſſignabilis *m* ad *n*, tum integræ C G ad integram C V, tum B F, ſive C H ablatæ ad ablatam B A ſeu C E, erit & reliquæ G H ad reliquam V E aſſignabilis eadem ratio *m* ad *n*; Quare &c.



3. Patet hinc tertiò etiam trapetia figuræ primæ, ſeu quadrilinea figuræ ſecundæ, F B C G, A B C V, [quæ pariter fiunt infinitè parva, pro majori acceſſu linearum B F,

CG)

CG) futura ſemper in eadem ratione aſſignabili *m* ad *n*, quam perpetuò obſervant, in pari altitudine, quælibet ipſorum ordinatæ GC, CV: ergo &c.

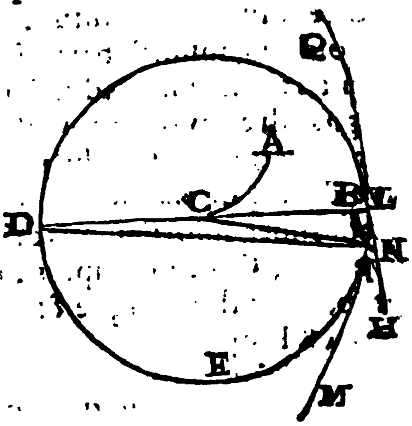
4. Quin etiam quartò, ſi eadem quadrilinea circa axem BC revolvi intelligantur, orientur hinc trunci conici, ſeu conoidales, infinitè parvi [nam pro majori acceſſu planorum circularium, radiis BF, CG deſcriptorum, hi trunci aſſignabili quovis corpuſculo minores evadent] & tamen ſemper in ratione aſſignabili, nempe duplicata ipſius *m* ad *n*, ſive dicas, ut *mm* ad *nn*, eſſe oſtendentur, ob circulos à quibuslibet ipſorum quadrilineorum ordinatis FB, AB, ſive CG, CV, deſcriptos, eorundem radiorum quadratis proportionales: itaque & in hoc magnitudinum genere vera eſt Propoſitio.

SCHOLION.

Hinc patet eorum hallucinatio, qui magnitudines infinitè parvas pro minimis ſui generis habent, illaſque ſive ut penitus indiviſibiles, ſive ut invicem æquales conſiderant. Non *ſolent quidem ſummi Mathematici in hunc errorem cum vulgo impingere, nec deſunt tamen exempla quædam, probantia id poſſe aliquando Viris etiam in hac arte, atque in hac ipſa methodo, verſatiſſimis, per incogitantiam, excidere. Videat Cl. Varignonius (hujus regulæ certè non ignarus, quam & toties exactiſſimè obſervat) an non occaſionem præbuerit, ſuſpicandi, calculi perplexitati majorem, quàm legitimo infinitè parvorum uſui, attentionem ab ipſo impenſam, quoties Vires Centrales examinans, aut Radios Evolutarum inquirens, angulum contingentiæ, utpotè infinitè parvum, aſſumit velut æqualem angulo infinitè parvo, ad centrum oſculantis circuli, à binis radiis infinitè proximis conſtituto, indeque triangula iſoſcelia conſiderat, eandemque laterum ad baſim proportionem deducit. Videantur* Monum. Academ. Reg. edit. Amſtelodam. anni 1700 pag. 301: anni 1701 pag. 27,

31, 34: anni 1703. pag. 252: anni 1706 pag. 245, 293, 647, 652, 656, atque alibi fortaſſe.

Nimirum poſita Curva QLM, ejuſque Evoluta AC (quam videlicet tangunt priores curvæ perpendiculares quælibet LC, lC) ductiſque radiis infinitè proximis LC, lC ad centrū circuli LED, propoſitam curvam oſculantis (eo quòd ſit maximus illi ad punctum L inſcriptibilium, eandemque cum ipſa QLM curvaturæ rationem obtineat, circa punctum L ipſi valdè congruens, & cum illa longiſſime repens) atque intervallo Ll infinitè parvo, deſcripto arcu lN, occurrente tangenti LH in N, contendit Varignonius locis citatis, ſimilia fore triangula LCl, lLN, unde deducit lN eſſe tertiam proportionalem poſt CL, Ll, perinde ac ſi anguli infinitè parvi lLN, LCl æquales forent, cum hic potius ſit duplus illius; Nam extenſo radio LC ad alteram circumferentiæ partem in D, ac juncta Dl, eſt angulus lCL duplus ejus lDL (20. 3. elem.) huic verò æquatur lLN, quia à tangente LH, & ſecante Ll [cum arcu Ll ad ſummum congruente] conſtituitur [22. ejuſd.] adeoque LCl duplus eſt lLN; quare dictorum triangulorum ſimilitudo, laterumque inde habita proportionalitas, non ſubſiſtit; imò ducta lB tangenti LN parallela, oſtenditur [coroll. 8. 6. elem.] Ll media proportionalis inter BL, ſeu lN, & diametrum LD, non inter illam, & radium; adeòque formulæ ex Varignonii calculo ſic inſtituto prodeuntes, ſunt duplo majores quàm res exigeret. Atque hæc potius mens ergo cenſebitur differentiæ inter formulas Viviani generalium, anno 1701 adductas, à formulis anno 1706, 21 Aprilis, art. 11, 12, & 13, inventis, quam differentiam Auctor ipſe pag. 238 animadvertens,

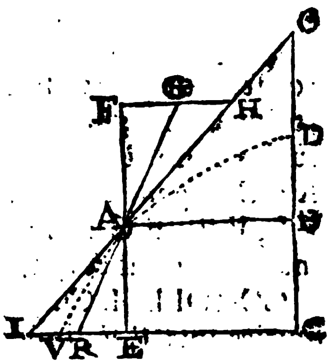


tem fruſtrà excuſare niſus eſt, ex quo non tam magnitudinum æqualitas, quàm rationum ſimilitudo in formulis illis exprimenetur, quæ etiam in duplicato, vel utcumque multiplicato earum valore perſiſtit: quod licèt verum ſit, genuinum tamen illius variationis fontem non aperit, ex prænotata lege, tunc minùs attentè obſervata, pendentem; unde licèt in Varignonii caſu nullum errorem demonſtrationem Vis centralis infirmet, eo quòd perinde res ſe habeat, ſive illa reciproca radii colligatur, ſive reciproca diametri circuli oſculatoris, cùm ipſimet radii ſint, ut integræ diametri, tamen, admiſſa hac arguendi ratione, poſſet in aliis caſibus talis error obrepere, unde falſa penitus concluſio deduceretur.

PROPOSITIO V.

QUadam etiam, ex quantitatibus infinitè parvis, diverſi ſunt ordinis, atque aliæ aliis infinities majores, aut minores, adque ſine ullo limite.

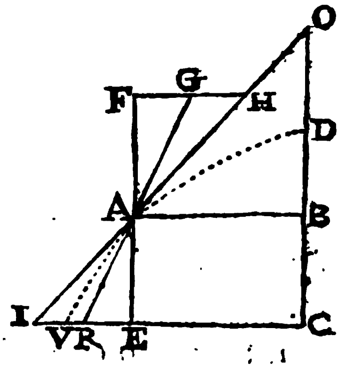
1. Sit primò curva DAV, cujus ordinatæ AB infinitè proxima fieri concipiatur alia CV, & axi DB parallela EA extendatur ultra curvam in F ad aliquam datã longitudinẽ AF, ducaturque FH ipſi AB parallela, occurrens in H rectæ OAI tangenti Curvã propoſitam in A, & concurrenti cum CV in I; tum diviſa FH ad punctum G in quavis ratione aſſignabili *m* ad *n*, jungatur GA, quæ producta omninò intra curvam cadet (aliàs & ipſa tangeret, quod eſt abſurdum; nec enim duæ rectæ ad idem unius continuæ curvæ punctum illam tangere poſſunt), licèt poſt aliquod determinabile intervallum, illam fortaſſe ſit ſecatura, & ideò ipſam CV, quæ ad in-



 ter-

tervallum minus quolibet dato ipſi A B accedit, omninò ſecabit inter E & V, velut in R: eritque ratio E I ad I V major ratione ejuſdem E I ad I R; ſed hæc, ob ſimilitudinem triangulorum, eadem eſt, ac F H ad H G, quæ poteſt eſſe quævis aſſignabilis *m* ad *n*, ergo E I ad I V, adeoque & dividendo E V ad V I, rationem habet majorem qualibet aſſignabili, unde *ex defin.* 5. *&* 6. illa infinities major eſt, quàm iſta, & ordinis, ad hanc ſuperioris; Quod &c.

2. Rurſus trilineum ipſum V A I erit infinities minus trilineo E A V, vel E A I (ob baſim V I infinitè minorem ipſa V E, vel E I) necnon ipſorum utrumque adhuc infinities minus eſt quadrilineo infinitè parvo A B C I, vel A B C V, aut A B C E (quia lineæ E V, E I ſunt ipſa A B infinities minores) unde & hinc patet, varios ordines reſultare infinitè parvorum.



3. Quin etiam ſi circa ordinatam B A omnes illæ areæ rotarentur, foret ſolidum à trilineo V A I infinitè minus ſolido à triangulo E A I, vel à trilineo E A V: hoc autem rurſus infinitè minus ſolido à quadrilineis A B C I, A B C V, A B C E genito, nam quælibet ſuperficies cylindricæ, ab V I, V E, E C productæ, fierent eodem ordine aliæ aliis infinities minores; Quare conſtat propoſitum.

COROLL. I. Cum oſtenſa ſit *num.* 1. recta V I minor infinities ipſa E V, hinc eſt quòd *juxta coroll.* 2 *prop.* III. poteſt E V conſiderari ut æqualis ipſi E I, à qua differt differentia infinitè minori.

COROLL. II. Unde amplius demonſtratur methodus infinitè parvorum in ducenda cujuſvis curvæ tangente; cùm enim, ob ſimilitudinem triangulorum, ſit I E, ſive illi, ex dictis, æqualis V E, ad A E, ut A B ad B O, ergo ſub-

tan-

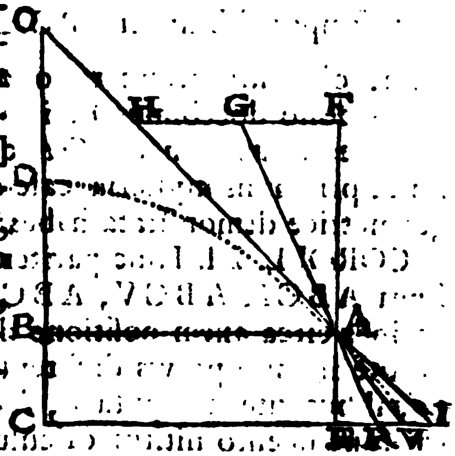
tangens BO eſt ſemper quarta proportionalis poſt differentiam infinitè parvam ordinatarum VE, & differentiam abſciſſarum AE ſeu BC: quare, ſi ordinata vocetur y, & abſciſſa x, adeoque differentiæ earundem ſint dy, dx, erit ſemper ſubtangens BO $= \frac{ydx}{dy}$. Et ex curvæ natura data, cùm innoteſcat ratio dy ad dx (ut mox in ſubjuncto Scholio docebimus) etiam nota fiet ratio BA ad BO, & expeditiſſimè tangens OA determinabitur: ita ut à ſuiſmet principiis myſteria calculi differentialis hoc modo geometricè demonſtrata habeantur.

COROLL. III. Hinc pariter colligitur, ipſamet quadrilinea ABCI, ABCV, ABCE [nec non & ſolida, quæ ab ipſis circa axem poſitione datum rotatis gignerentur] utpotè infinitè parvis differentiis diſcrepantia, poſſe pro æqualibus ritè computari, *juxta idem coroll. 2 prop. III.* cui fundamento nititur calculus integralis; ex ejus enim præſcripto,] ſumma ex rectangulis ordinatarum BA in quaſlibet ſibi correſpondentes differentias infinitè parvas axis BC, æquatur ipſimet areæ curvilineæ CDAV: neq non ſumma cylindrorum, quorum baſes ſint circuli ab ordinatis deſcripti, & altitudines ſint eædem infinitè parvæ differentiæ axis, æquatur rotundo ſolido, ab ipſa figura curvilinea generato: quippe differentia omnis, per indefinitam axis ſectionem, multiplicato rotum rectangulorum, aut cylindrorum numero, & diminuta in infinitum quantitate ſingulorum, fit infinitè exigua, adeòque evaneſcit.

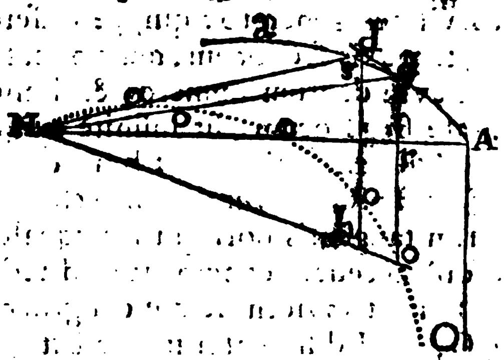
COROLL. IV. Sed et hinc conſtat, ipſummet arcum AV infinitè parvum, tam rectæ lineæ AV ſibi ſubtenſæ, quàm tangentis portioni AL æqualem eſſe: ſi enim AG tam propè accedere concipiatur ad rectam AH, ut punctis G, H ſibimet invicem fermè congruentibus, utriuſque ipſarū AG, AH differentia minor fiat quavis aſſignabili magnitudine, ideſt evadat infinitè parva, tunc *ex 2. coroll.*

prop.

prop. III. fiet altera alteri æqualis; quare et AR æqualis evadet ipſi AI tangenti, multoque magis curva AV utrique interpoſita (quæ media inter utramque longitudine eſt), ita ut quamdiu finita fuerit, major quidem oſtendatur ſubtenſa recta AV, adeoque & AR, quæ perpendiculo eſt propior, at minor tangente AI, obtuſum angulum AVI ſubtendente; fiet æqualis tum ipſi tangenti AI, tum ſuæ ſubtenſæ AV, & promiſcuè una ex his pro alia tutò uſurpari poterit, quoties de infinitè parvis ſermo fuerit; imò ipſamet curvæ particula AV infinitè exigua, tamquam recta conſiderari poterit, citra ullum erroris periculum (nam error, dum ſit infinitè parvus, tandem evaneſcit, ac nullus evadit) quod ſignificant recentiores Geometræ, dum curvas omnes ſub ratione cujuſdam polygoni infinitorum laterum ſpectare nos docent, & curvarum tangentem quamvis pro unius, ex ejuſmodi lateribus infinitè parvis, productione aſſignandam præſcribunt.



COROLL. V. Eadem jure areas curvilineas quandoque licebit in triangula rectilinea infinitè parva reſolvere, ad ipſarum dimenſionem inveniendam; veluti ſi propoſitam curvam AQ, electo ut libuerit, ſive intra, ſive extra curvæ perimetrum, quovis puncto N, atque



atque inde ad ſingula curvæ puncta ductis ramis infinitè proximis Nſ, Nſ, poterit ſector N*as* pro triangulo rectilineo cenſeri, quia *ex coroll. præced.* arcus *as* infinitè parvus pro recta aſſumi poteſt: & quoniam, extenſa Nſ ad tangentem in *d*, portio *ſd* adhuc infinities minor evadit recta Nſ, adeòque triangulum *asd* eſt quantitas infinitè parva ſecundi ordinis, quippe infinities minus triangulo N*sa* jam infinitè exiguo, poterit indiſcriminatim etiam N*ad* ſumi pro ipſo N*as*, & alterutrum ipſorum conſiderari velut elementum areæ NA*a*, itaut ejuſmodi triangulorum ſumma det menſuram integram talis areæ; Et ſi talis alia curva O*o*N exhibeatur, cujus rami N*o* ſint perpetuò paralleli ad correſpondentem prioris curvæ tangentem *ad*, conſtat fore aream utrique curvæ interpoſitam *oo*OA*as* duplam ſemper ſectoris correſpondentis A*as*N, propter ſingula parallelogramma *daob* (quæ non differunt ab areolis infinitè exiguis *oaso*, niſi per trilinea infinities adhuc minora *odo*, *dsa*, ob baſes *ob*, *ds* infinities minores ipſis *ao*, *sb*, & ideò æqualia invicem cenſeri debent *ex coroll. 2. prop. III. ſæpe citato*) dupla triangulorum A*d*N in eadem baſi *ad*, iiſdemque parallelis *da*, N*o* exiſtentium, ut *cap. 8. Hugenianorum* demonſtravimus.

Obiter autem animadvertere placet, hujus methodi fundamentum, etſi novum videatur, nec abſque ſcrupulo à pleriſque admitti conſueverit, nimirum: *magnitudines, quarum differentia minor evadit quolibet aſſignabili differentia, ſeu quæ differre poſſunt quantitate eiſdem infinities minori, pro æqualibus rectè aſſumi*: antiquiſſimum reipſa eſſe, ac Veterum methodo, quæ per inſcriptiones, & circumſcriptiones, longiori circuitu, figurarum æqualitatem, vel aliam proportionem venabatur, neceſſariò fuiſſe præſuppoſitum; Vis enim demonſtrationum ejuſmodi apud Euclidem, & Archimedem in eo certè conſiſtit, quòd, niſi veræ forent ipſorum propoſitiones, aſſignari poſſet differentia figurarum, nem-

nempe exceſsus; aut defectus ab aſſerta menſura: facta autem tali aſſignatione, cùm per inſcriptionem, & circumſcriptionem oſtendantur alię figuræ minùs excedere, aut deficere à figuris propoſitis, quàm pro differentia aſſignata, & tamen aſſertam menſuræ rationem conſtanter obſervare, concluditur ab abſurdo, differentiam ab adverſario aſſignatam nullam eſſe, utpotè minorem qualibet aſſignabili: atqui hoc ipſum, majori compendio, & nos dicimus, dum magnitudines, differentia infinities minori diſcrepantes, pro æqualibus habemus: ſi non ſunt habendæ pro æqualibus, aſſignabilis erit eorum differentia; aſſignetur ergo: non igitur ipſarum differentia minor evadet qualibet aſſignabili, quod eſt contra hypotheſim; falſum eſt ergo, non eſſe habendas pro æqualibus: Quod eſt propoſitum.

SCHOLION.

INveſtigatio autem rationis differentiæ ordinatarum ad differentias abſciſſarum in qualibet Curva, unde tangentium methodum ſuperiùs, coroll. 2. hujus prop. *pendere diximus, ſic proceſſit. Quantitates determinatæ, & ejuſdem ſemper menſuræ, primis alphabeti litteris* a, b, c, e *&c. denotentur: indeterminata verò, quæ ſubindè creſcunt, aut decreſcunt, per poſtremas* x, y, z, u *&c. de more exprimantur, ut habeatur æquatio curvæ propria: ſic in parabolis, ſi latus rectum vocetur* a, *& abſciſſa* x, *ordinata verò* y, *patet, æquationem curvæ propriam fore* yy = ax, *propter ordinatæ quadratum ſemper æquale rectangulo abſciſſæ in latus rectum: atque ita in aliis magis compoſitis. Tum ſupponatur abſciſſa, verbigratia* x, *augeri portione ſui infinitè parva* dx *(ſic enim illam exprimere docuit Leibnitzius, ut differentiam ipſius* y *vocat* dy, *& ipſius* z *appellat* dz, *atque ita in aliis) adeò ut evadat abſciſſa* x+dx; *& tum illi correſpondere deprehenditur* y+dy, *vel* y−dy *pro ordinata (prout videlicet applicatæ creſcunt, aut decreſcunt ad* incre-

incrementum abſciſſæ) itaque in æquatione, quæ curvæ naturam determinat, ſi loco x, *&* y, *ac productorum ex ipſis, vel poteſtatum earundem, ſubrogetur* $x+dx$, *&* $y\pm dy$, *eorumque producta, aut poteſtates; ac mox termini comparentur, quos differentiæ* dx, *&* dy *ingrediuntur, abiectis tum terminis, quos hæ differentiæ non afficiunt [utpotè in vim prioris æquationis, ab initio propoſitæ, jam æqualibus] tum terminis, quos ingreditur productum ex pluribus differentiis* dx, dy, *ſive ad invicem, ſive per ſe ipſas multiplicatis (utpotè infinities minoribus, &* per 2. coroll. prop. III. *æqualitati reliquorum terminorum nihil derogantibus, ſi abiiciantur) habebitur æquatio differentialis, ex qua ratio differentiæ ordinatarum ad differentias abſciſſarum, nempe earundem* dy, *&* dx, *innoteſcet. Itaque in æquatione parabolæ ſuperiùs propoſita, ubi* $yy = ax$, *habebitur etiã* $yy+2ydy+dydy = ax+adx$; *ſed jam* $yy = ax$, *ergo reſidua pariter æquantur, ſcilicet* $2ydy+dydy = adx$: *abiiciatur* dydy, *quod infinities minus eſt ipſo* 2ydy *[nam ad illud eſt in ratione infinitè parva quantitatis* dy *ad finitam* 2y *] manebit adhuc* $2ydy = adx$; *adeòque ut* a *ad* 2y, *ſive ut* y *ad* 2x, *ita* dy *ad* dx, *& ita conſequenter ex ſupradictis* coroll. 2. hujus propoſitionis, *ordinata* y *ad ſubtangentem, quæ ideò dupla invenietur abſciſſæ* x, *utpotè* $= 2x$.

Aliud exemplum eſto in curva, cujus natura definitur æquatione $yy = aa+xx$ *(quæ eſſet hyperbola æquilatera ad ſecundam diametrum relata) ergo ſi* y *evadat* $y+dy$, *&* x *fiat* $x+dx$, *habebitur* $yy+2ydy+dydy = aa+xx+2xdx+dxdx$: *auferantur tum* $yy = aa+xx$, *tum termini infinities minores reliquis* dydy, *ac* dxdx; *eritque* $2ydy = 2xdx$, *adeoque* dy *ad* dx *erit, ut* x *ad* y, *unde ut abſciſſa* x *ad ordinatam* y, *ita erit ipſa eadem ordinata* y *ad ſubtangentem quæſitam, quæ erit tertia proportionalis abſciſſæ, & ordinatæ.*

Expeditiùs autem ſumitur differentia cujuſvis æquationis propoſitæ, ſi in illa ubique termini ab indeterminatis affecti multiplicentur per numerum dimenſionis earundem indeterminatarum,

& una illarum dimenſio in ſuam differentialem commutetur, loco x, *&* y *ſcribendo* dx, *&* dy. *Ita enim ſi* $yy = ax$, *etiam* $2ydy = adx$; *ſi* $x^3y = a^4 + xxyy$, *etiam* $3yxxdx + x^3dy = 2xxydy + 2yyxdx$, *adeoque per antithesin*, $3yxxdx - 2yyxdx = 2xxydy - x^3dy$: *& ſic eſt* dy *ad* dx, *ut* $3yxx - 2yyx$ *ad* $2xxy - x^3$. *Id quod valet in quibuſvis, tam perfectis, quam imperfectis indeterminatarum poteſtatibus: adeò ut generatim differentia ipſius* x^m *ſit* $mx^{m-1}dx$, *quemcunque numerum integrum, aut fractum, poſitivum, vel negativum denotet exponens* m.

Atque hinc viceverſa integratio cujuſvis differentialis, ſeu reverſio ad quantitatem, cujus propoſita fuerit differentia, habetur, augendo unitate dimenſionem indeterminatæ x, *vel* y, *& per eandem dimenſionem ſic auctam, totum productum dividendo, ut ipſius* $x^m dx$ *ſumma erit* $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. *Unde eliciuntur innumeræ ſpatiorum ſuperficialium, & ſolidorum dimenſiones: dummodo advertatur, inventæ ſummæ perſæpe addendam, aut ſubtrahendam, prout res tulerit, quantitatem aliquam conſtantem, eo quòd eadem differentia ſit duarum quantitatum, ſive illis communem jungas, ſive demas datam aliquam magnitudinem; Quando autem hæc addi, vel detrahi debeat, invenies, obſervando, an ubi evaneſcit quantitas, de cujus dimenſione per integrationem obtinenda agitur, pariter evaneſcat integralis inventa, an quiddam conſtans inter ejus terminos adhuc ſuperſit, hoc ipſum enim ſub ſigno contrario erit inventæ integrali apponendum, ut verus valor ſummæ quæſitæ habeatur.*

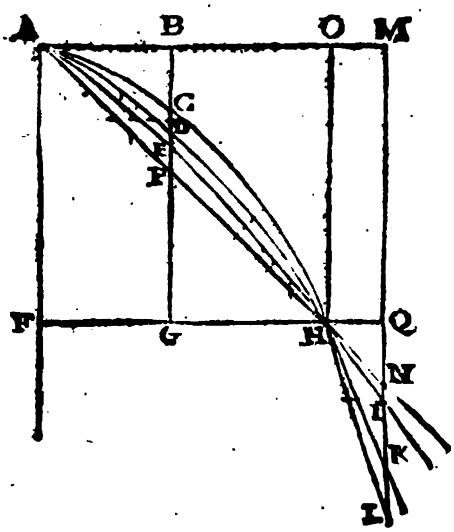
PROPOSITIO VI.

Quod præcedens docuit, aliter per infinitas parabolas demonſtrare.

1. Intra quadratum AFHO, cujus diameter AH, deſcriptæ ſint, eodem latere recto AO, infinitæ parabolæ variorum graduum, nempe AEH quadratica, ſive Apollo-

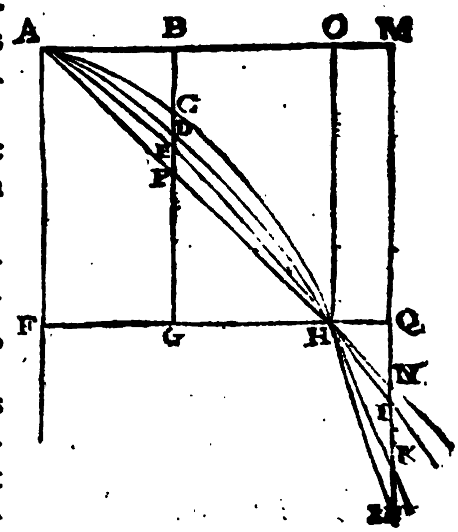
nia-

niana, ADH cubica, ACH biquadratica, &c. adeo ut ducta ubivis recta BCDEPG axi parallela, ſecante has curvas, & rectam AH, ut in figura, ſit ſemper HO ad BP in eadem ratione ipſarum OA, AB, ſed HO ad BE in earundem ratione duplicata, & ad BD in triplicata, ad BC autem in quadruplicata, atque ita deinceps. Patet ergo, rectas HO, ſeu GB, & reliquas ejus interceptas BP, BE, BD, BC &c. fore ſemper continuè proportionales; quare ſi tam proxima fieri concipiatur BG axi AF, ut intercepta BP evadat infinitè parva, cùm ſit ratio GB ad BP eadem rationi BP ad BE, & hujus ad BD, & hujus rurſus ad BC, prima autem ratio ſit major qualibet aſſignabili *ex def.* 4. *& convertendo*, etiam reliquæ majores erunt qualibet aſſignabili, & ideò quantitatum PB, BE, BD, BC, quælibet reſpectu antecedentis erit, *per def.* 5. *&* 6. infinitè parva, atque inferioris ad ipſam ordinis: quare inter magnitudines abſolutè infinitè parvas datur hæc diverſitas ordinis: quod erat &c.



2. Angulus contingentiæ BAE eſt infinities minor angulo rectilineo BAP, & angulus BAD rurſus infinities minor eſt angulo BAE, angulus autem BAC infinities adhuc minor eſt angulo BAD, atque ita porrò in infinitum, ob ſubtenſas PB, EB, DB, CB, eadem ratione majori quavis aſſignabili in infinitum decreſcentes; datur ergo & in angulis infinitè parvis hæc ordinis diverſitas: quod erat demonſtrandum.

3. Area ipſa rectanguli infinitè parvi A B G F infinitè major eſt triangulo A B P, & hoc infinitè majus trilineo A B E, quod ipſum infinitè majus eſt trilineo A B D, & hoc infinitè adhuc majus trilineo A B C, atque ita deinceps, ob baſes continuè proportionales, & ratione majori qualibet data decreſcentes; unde patet in ſuperficiebus infinitè parvis hæc diverſitas ordinis.



4. Quod ſi eædem areæ vertantur circa A B, ut à rectangulo A B G F cylindrus, à triangulo A B P conus, à reliquis trilineis fuſi conoidales generentur, conſtat, ex ſolidis ita genitis, alia aliis infinities minora, ob ſimilem rationem, proditura; quare et in corporibus infinitè parvis variorum ordinum diverſitas locum habet; quod erat &c.

COROLL. Ex dictis ſupra *num.* 2. habetur, quòd ſicuti nulla recta linea primum angulum contingentię B A E dividere poteſt, ut oſtendit Euclides *lib.* 3. *prop.* 16. ſed tantũ arcus circuli, vel parabolæ, aut alterius lineæ æquicurvæ; ita poſtmodùm angulum B A D nullus arcus circuli, vel parabolæ quadraticæ dividere poteſt, ſed tantùm arcus parabolæ cubicæ ſibi ſimilis, vel altioris ordinis; angulum verò B A C nec ipſa quidem parabola cubica dividet, atque ita de aliis in infinitum: *neque novit natura limitem*, ut ait doctiſs. Eques Iſaac Nevvton *Princip. Math. Philoſ. Nat. lib.* 1. *Sect.* 1. *Schol. poſt lemm.* 11. ubi et notat, binis quibuslibet ejuſmodi angulis alios rurſus inſeri poſſe

me-

medii, inter utrumque, ordinis, ideſt infinities minores uno extremorum, & infinities majores alio.

SCHOLION.

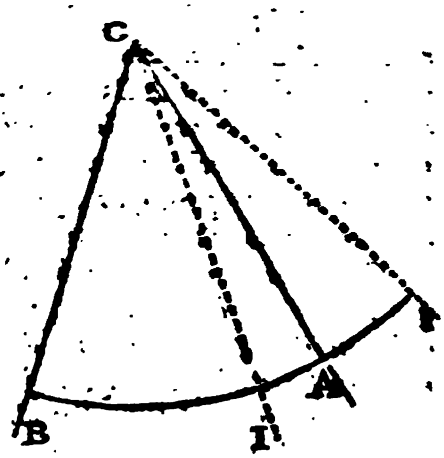
EX hoc vario infinitè parvorum ordine, innotuit Philoſophis, Gravitatem eſſe vim infinitè parvam reſpectu Virtutis cujuslibet actu moventis corpus quoddam velocitate nota menſura; ſi enim hæc Virtus proiiciat mobile per directionem A O, ita ut tempore t *ferri poſſit ab A ad O, utique dicti temporis particula infinitè parva* dt *illud promovebit per portionem ſpatii infinitè parvam A B; ſed interim Gravitas illud deprimat uſque ad parabolam A E H, nimirum per particulam B E infinitè minorem ipſa B F, ſive ipſa A B; quare Vis Gravitatis infinities minor cenſenda erit Virtute dicti proiicientis mobile per A O, ſiquidem illi reſpondet effectus infinities minor, quàm huic, dum utraque tempore infinitè parvo, ut æquabiliter operans, concipi debet, nam augmenta velocitatis, quæ tempore infinitè parvo* dt *ſibi ſuperaddit Gravitas ſupra illum infinitè exiguum velocitatis gradum, quo incipit deprimere mobile, utpotè infinities infinitè minora, velut nihil conſideranda ſunt, donec per tempus finitum, & notæ menſuræ ſatis adoleverint, ut jam debeant computari. Idem ſequetur in Viribus (ſiqua ſint alicubi) aliorum generum infinities minoribus: nempe ſi talis ſpecies Gravitatis, aut Vis centripeta concipiatur, quæ corpora acceleret in duplicata ratione temporis, hæc compoſita cum eadem Virtute projectiva, in temporis differentia infinitè parva* dt *deprimet mobile per B D uſque ad parabolam cubicam, dum Vis gravitatis depreſſiſſet per B E uſque ad parabolam quadraticam; ideoque Vis centripeta dicti generis foret adhuc infinities minor Vi gravitatis, propter motum B D infinities minorem ipſo B E. Similiter ſi Vis centripeta ejus rationis fingeretur, quæ acceleraret mobile in triplicata temporis ratione, conſtat, quòd hæc momentaneo tempore* dt, *non niſi per B C ad parabolam quadratoquadraticam deprimeret mobile,*

unde

unde adhuc infinities minor præcedente probaretur. Verùm hæc de infinitè parvis ſufficiat breviter attigiſſe: ad infinitè magna gradum facere convenit, de quibus eadem ferè demonſtrabimus, ut noſtrum propoſitum Spatiorum Pluſquam infinitorum concludere liceat.

PROPOSITIO VII.

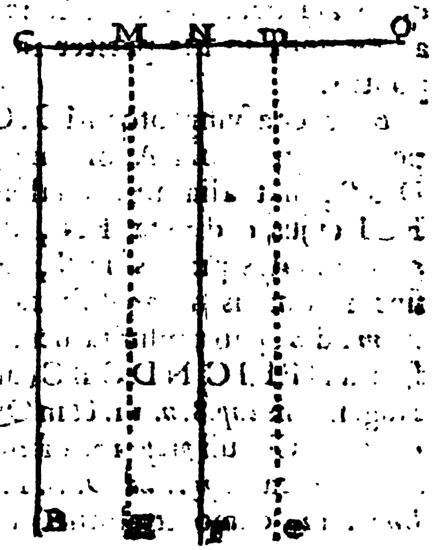
Quantitatum abſolutè Infinitarum quædam ejuſdem ſunt ordinis, & quamlibet inter ſe rationem aſſignabilem habere poſſunt.



1. Sit enim primò angulare ſpatium BCA, lineis CB, CA æquè in infinitum productis, per modum infinitè longi ſectoris, interceptum, ſiat autem angulus BCI ad ipſum BCA in quavis ratione aſſignabili *m* ad *n*: patet, infinitum quoque ſpatium interceptum rectis CB, CI æquè in infinitum protractis cum ipſa CA, futurum in eadem ratione aſſignabili *m* ad *n* ad angulare ſpatium prius datum BCA; ideoque hæc abſolutè infinita ſpatia ejuſdem inter ſe ordinis erunt, & quamlibet inter ſe rationem habere poterunt.

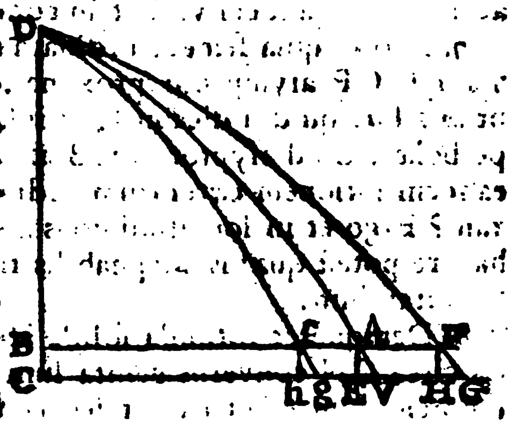
2. Sit rurſus (*in figura ſequenti*) parallelogrammum infinitè longum BCNF ſuper finita baſi CN, & fiat CM ad CN in qualibet ratione aſſignabili *m* ad *n*, ducaturque ipſis CB, NF parallela ME, eritque infinitè longum parallelogrammum baſi CM, lineis CB, ME (æque infinitè productis cum ipſa NF) interjectum, ad prius

pa-



parallelogrammum BCNF in eadem aſſignabili ratione m ad n, hoc eſt ſuarummet baſium GM ad CN: quod erat &c.

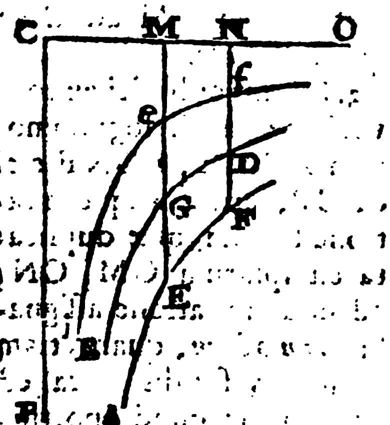
3. Infiniti cylindri ex converſione parallelogrammorum BCME, BCNF circa CB, erunt utique in ratione baſium, quæ duplicata eſt ipſarum CM, CN, adeoque in ratione aſſignabili mm ad nn, quare etiam in figuris ſolidis vera eſt propoſitio: quod oportuerat demonſtrare.



4. In qualibet ex iis figuris, quæ in infinitum ampliantur, ut parabole, aut hyperbole DAV, circa axem DC, fiat alia figura DFG priori analoga, cujus nempe ordinatæ FB, GC ad ordinatas prioris AB, VC ſint ſemper in eadem ratione quapiam aſſignabili m ad n: patet, quod ſi utraque cum axe ſuo in infinitum producatur, erit area infinita CDFG ad infinitam aream CDAV in ratione ordinatarum m ad n, quæ eſt ratio aſſignabilis; ergo idem quod prius.

5. Sed et ſolida ab his genita circa axem infinitum DC erunt in ratione ſuarum ſectionum circularium, ſive ut qua-

quadrata ordinatarum, & ideò in ratione aſſignabili *mm* ad *nn* unde in his pariter infinitis corporibus obtinet propoſitio.



6. Inter aſymptotos MC, CP poſita Hyperbola Apolloniana DGB, fiat alia huic analoga FEI cujus ordinatæ FN, EM ad ordinatas prioris DN, GM ſint in quavis aſſignabili ratione *m* ad *n*, patet infinita utraque ſpatia NFEIC, NDGBC (ut in Hugenianis *cap.* 8. *n.* 11. & in Quadratura Circuli *prop.* 17. oſtendi, atque infra *Epiſt. ad D. A. L. A. lemm.* 12. demonſtrabitur) fore ad invicem in eademmet ratione aſſignabili ordinatarum *m* ad *n*; quod eandem veritatem confirmat.

7. Imò et quia ſemper ordinata quævis ME, quantumvis ipſi CP aſymptoto proxima, eſt ad ordinatam MG, ut *m* ad *n*, quidni dicamus, & ipſam aſymptoton CI hyperbolæ FE ad aſyptoton CB alterius hyperbolæ pariter eandem rationem cæterarum ordinatarum *m* ad *n* habituram? Ergo et in longitudinibus abſolutè infinitis locum habere poteſt quævis aſſignabilis ratio: quod fuerat demonſtrandum.

8. Denique et rotunda ſolida ab hiſce ſpatiis aſymtoticis circa CN converſis genita ſunt molis abſolutè infinitæ (poteſt enim ex utrovis reſecari versùs baſim cylindrus æqualis cuilibet dato *ex coroll.* 18. *Torricell. de Solido Hyperbolico*), & tamen aſſignabilem inter ſe rationem obſervant *mm* ad *nn*, quæ eſt quadratorum, ſeu circulorum, qui ab ordinatis genitricum hyperbolarum, ea rotatione, fiunt: itaque infinitæ magnitudines cujuslibet aſſignabilis rationis ſunt capaces: quod &c.

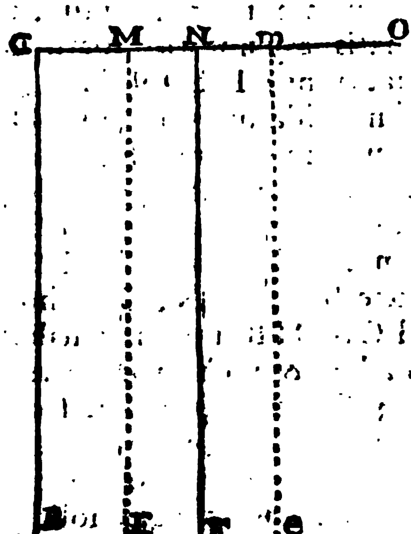
CO-

COROLL. Patet ex dictis n. 7. infinitas aſymptotos hyperbolarum non ſemper æquales cenſendas eſſe, cùm imò ſint ad invicem, ut quæ in pari altitudine ad alteram aſymptoton utriuſque hyperbolæ ordinantur, ſive ut inſcripta ipſarum parallelogramma; vel etiam ut earundem hyperbolarum figuræ, quæ à recto, & transverſo ipſarum axe continentur: quemadmodùm & ipſa hyperbolica ſpatia ſunt in eadem ratione dictarum figurarum, quæ ſub axibus continentur; qua in re, ut in pleriſque aliis proprietatibus, convenire hyperbolas cum ellipſibus, quæ pariter ſunt, ut axium figuræ, notiſſimum eſt Geometris.

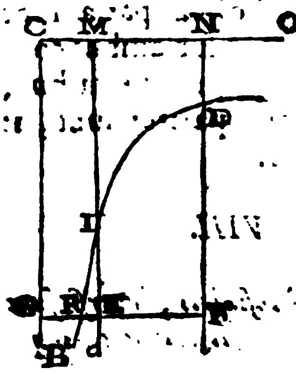
PROPOSITIO VIII.

Quædam verò, ex quantitatibus abſolutè infinitis, diverſi ſunt ordinis, atque aliæ aliis infinities majores, aut minores, idque ſine ullo limite.

1. Si primò Spatium angulare BCO, lateribus CB, GO indefinitè productis interjectum: patet, hoc infinities majus fore quovis parallelogrammo infinitæ dûtaxat longitudinis CB, ſed finitæ latitudinis CM, aut CN, videlicet ipſo BCME, aut BCNF, nam in pari omnium longitudine infinita CB, ſunt ad invicem, ut latitudines CO, CM, CN, quarum prima ad utramlibet poſteriorum habet rationem majorē qualibet aſſignabili.



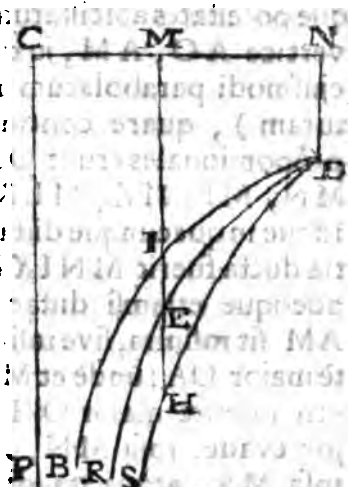
2. Sic deinde Spatium CNDIPB, hyperbola Apolloniana DIP [aliave curva asymptotica, quæ cum asymptoto infinitum ſpatium contineat, cujuſmodi eſt Conchois Nicomedea, & aliæ altioris gradus Hyperbolæ, quarum ordinatarum poteſtates majores ſunt poteſtatibus abſciſſarum] cum ſua asymptoto CB infinitè producta comprehenſum; & fiat, ut *m* ad *n*, ita NC ad CM, tum agatur ME asymptoto parallela, quæ ipſi curvæ DIP alicubi occurret, velut in I [eo quod curva ſemper fiat propior asymptoto, & ad intervallum GP perveniat minus quolibet dato intervallo, GM vel GE] atque ulterius protenſa, ſpatium PIE abſolutè infinitum (cujus nempe ordinatæ PE perpetuò creſcunt, dum longitudini IE in infinitum minori applicantur, decreſcentibus è contrario ordinatis asymptotici ſpatii GP), comprehendet; unde ſi quadrilineo IMDN finito, & bilineo PIE infinito commune addatur ſpatium CMIPB, fiet area CNDIPB abſolutè minor parallelogrammo infinitè longo BCME: quare major erit ratio parallelogrammi infiniti BCNF ad infinitum ſpatium asymptoticum CNDIB, quam ad infinitum parallelogrammum BCME; eſt autem ob hanc intentionem baſium CN, CM, hoc eſt ut *m* ad *n*; ergo BCNF ad CNDIB rationem habet majorem quolibet aſſignabili *m* ad *n*, & ideo eſt infinities major. Quod erat demonſtrandum.



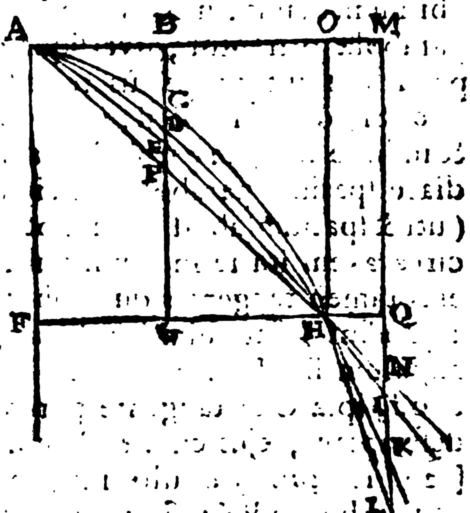
3. Quod ſi hæc omnia ſpatia circa CN rotarentur, manifeſtum eſt, ſolidum ab angulari ſpatio BCO infinities majus fore cylindro à parallelogrammo BCNF, & hoc rurſus infinities majus ſolido infinito, quod CNDIB produceret: quare et in corporibus infinitis diverſi infinitorum ordines obſervantur.

4. Jam

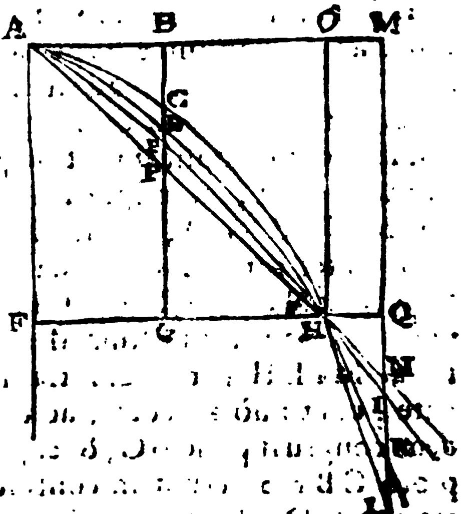
4. Jam verò ſi per punctum D, inter aſymptotos GN, CB tranſeant infinitæ hyperbolæ, nimirum linearis, ſive Apolloniana D I B, quadratica D E R, cubica D H S &c. ita ut rationi N C ad C M æqualis ſit ratio M I ad N D, ejuſdem verò duplicata ſit ratio M E ad N D, & triplicata ratio M H ad N D, & ſic deinceps, patet fore in continua ratione ipſas N D, M I, M E, M H &c. ideoque etiam ſi punctum M cum linea M I E H per ipſum tranſeunte, continuò accedat, ac tandem congruat puncto C, & aſymptoto C B R S, erunt in continua ratione N D ad infinitam C B, ut C B ad infinitam C R, atque ut hæc ipſa ad infinitam C S, unde varii ordines infinitarum longitudinum naſcentur, quarum aliæ aliis ſunt infinities majores.



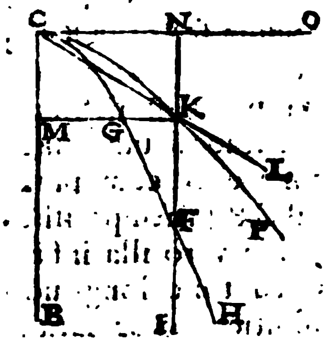
5. Idem ex infinitis Parabolis A E H, A D H, A C H [de quibus *prop.* 6. egimus] ultra nodum H cum recta A H (quæ diameter eſt quadrati illis circumſcripti) productis, oſtendi poteſt; ducta enim ipſi H O parallela M L, omnes ſecante in N, I, K, L &c ut in figura, erit rationis A O, A M, ſive O H, M N, duplicata ratio O H, M I, triplicata verò O H, M K, quadruplicata autem O H, M L, atque



que ita deinceps (eo quòd præfatæ axi parallelæ ſint ex ordine, ut quadrata, cubi, biquadrata, altioreſque poteſtates abſciſſarum à vertice AO, AM, juxta ejuſmodi parabolarum naturam), quare continuè proportionales erunt OH, MN, MI, MK, ML &c. idque in quacunque diſtantia ducta fuerit MNIKL, adeoque etiamſi diſtantia AM ſit infinita, ſive infinitè major OA: undè et MN erit infinitè major OH, & ſic MI pariter infinitè major evadet ipſa MN, & MK infinitiès major MI; & ML ipſa MK, atque ita deinceps ſine limite: imò & ſumptis, inter binas quaſlibet dictarum continuè proportionalium ſibi immediatas, mediis proportionalibus, aliæ intermediæ parabolæ orirentur; diverſique ordines medii infinitorum prodirent, inter ſuperiùs recenſitos.



6. Sic oſtendi poteſt, inter ſpatium infinitum angulare, & infinitè longum parallelogrammum finitæ latitudinis, mediare ſpatium parabolicum circa ſuum axem conſideratum (uti & ſpatium ab alia qualibet curva comprehenſum, quæ circa axem ita ſe in infinitum ſuis ordinatis expandat, ut ejus tamen tangentes quemlibet angulum cum axe continere poſſint) fiat enim (*in figura ſequenti*) angulus BCO ad angulum BCL in quavis ratione aſſignabili *m* ad *n*: patet, quòd ipſa CO tangente parabolam CK circa axem GB deſcriptam, ejus curvæ alicubi occurret CL, velut in K [27. 1. *Conic.*] & ulteriùs protenſa continebit cum curva parabolica PK infinitè producta ſpatium infinitum (quip-



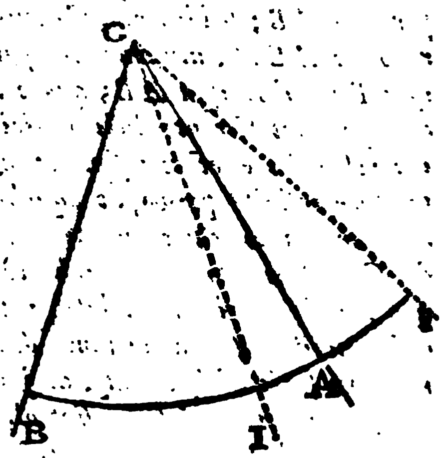
pe cujus latitudo ſemper augetur) P K L; & ideò ſpatium angulare B C L, quod à parabolico B C P deficit quidem ſegmento C K finito, ſed illud excedit infinito ſpatio L K P, erit utique majus eodem parabolico ſpatio, unde angulare ſpatium B C O ad illud parabolicum majorem habebit rationem, quàm ad aliud angulare B C L, ideſt, ex conſtructione, majorem habebit rationem ad illud, quàm ſit quævis aſſignabilis ratio *m* ad *n*, quare erit illo infinitè majus. Atque quia recta N K I axi parallela, nedum ſecat parabolam C K P in K, ſed et aliam quamlibet, quæ circa eundem axem deſcriberetur, ſectis ſingulis ordinatis K M prioris ad punctum G in data ratione *m* ad *n*, qualis eſſet C G H, ſecaret eadem axi parallela alicubi in puncto F (26. 1. *Conic.*) eidem non amplius occurrens, unde ſpatium infinitum reſultabit I F H, finitum verò C G F N, atque utrivis addito eodem B C G F I, erit majus parabolicum ſpatium B C F H parallelogrammo infinito B C N I; & ideò parabolicum aliud ſpatium B C K P majorem habebit rationem ad parallelogrammum B C N I, quàm ad parabolicam aream B C F H, ad quam tamen rationem habet ordinatarum, ſcilicet *m* ad *n*; unde primum parabolicum ſpatium ſuperat infinitum illud parallelogrammum, ultra omnem aſſignabilem rationem, ſcilicet eſt illo infinities majus; cùm eſſet [ex oſtenſis] angulari ſpatio B C O infinities minus; dantur ergo diverſi infinitorum ordines, ita ut quædam ſint aliis infinities majora, aut minora; quod &c.

COROLL. I. Hinc habetur, infinitum Parabolicum Trilineum O C K P, quod ab angulari ſpatio B C O differt parabolico ſpatio B C P, ex dictis num. 6. infinities minori, ipſimet angulari ſpatio B C O æquale cenſeri poſſe [*ex coroll.*

unde adhuc infinities minor præcedenti probaretur. Verùm hæc de infinitè parvis ſufficiat breviter attigiſſe: ad infinitè magna gradum facere convenit, de quibus eadem fermè demonſtrabimus, ut noſtrum propoſitum Spatiorum Pluſquam infinitorum concludere liceat.

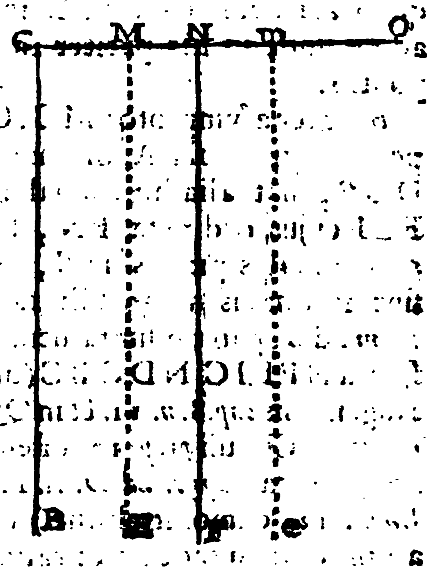
PROPOSITIO VII.

Quantitatum abſolutè Infinitarum quædam ejuſdem ſunt ordinis, & quamlibet inter ſe rationem aſſignabilem habere poſſunt.



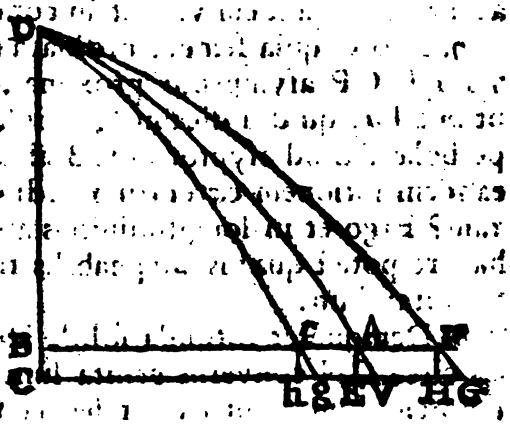
1. Sit enim primò angulare ſpatium BCA, lineis CB, CA æquè in infinitum productis, per modum infinitè longi ſectoris, interceptum, ſit autem angulus BCI ad ipſum BCA in quavis ratione aſſignabili *m* ad *n*: patet, infinitum quoque ſpatium interceptum rectis CB, CI æquè in infinitum protractis cum ipſa CA, futurum in eadem ratione aſſignabili *m* ad *n* ad angulare ſpatium prius datum BCA; ideoque hæc abſolutè infinita ſpatia ejuſdem inter ſe ordinis erunt, & quamlibet inter ſe rationem habere poterunt.

2. Sit rurſus (*in figura ſequenti*) parallelogrammum infinitè longum BCNF ſuper finita baſi CN, & fiat CM ad CN in qualibet ratione aſſignabili *m* ad *n*, ducaturque ipſis CB, NF parallela ME, eritque infinitè longum parallelogrammum baſi CM, lineis CB, ME (æque infinitè productis cum ipſa NF) interjectum, ad prius pa-



parallelogrammum BCNF in eadem aſſignabili ratione *m* ad *n*, hoc eſt ſuarummet baſium CM ad CN: quod erat &c.

3. Infiniti cylindri ex converſione parallelogrammorum BCME, BCNF circa CB, erunt utique in ratione baſium, quæ duplicata eſt ipſarum CM, CN, adeoque in ratione aſſignabili *mm* ad *nn*, quare etiam in figuris ſolidis vera eſt propoſitio: quod oportuemus demonſtrare.

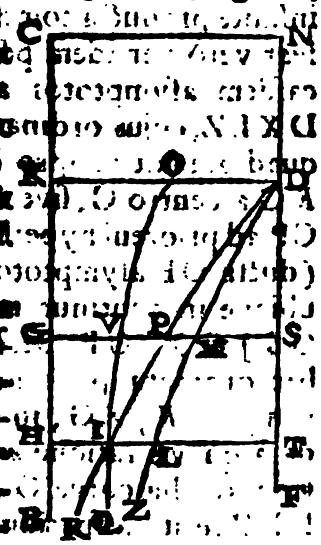


4. In qualibet ex iis figuris, quæ in infinitum ampliantur, ut parabole, aut hyperbole DAV, circa axem DC, fiat alia figura DFG prioris analoga, cujus nempe ordinatæ FB, GC ad ordinatas prioris AB, VC ſint ſemper in eadem ratione quapiam aſſignabili *m* ad *n*; patet, quod ſi utraque cum axe ſuo in infinitum producatur, erit area infinita CDFG ad infinitam aream CDAV in ratione ordinatarum *m* ad *n*, quæ eſt ratio aſſignabilis; ergo idem quod prius.

5. Sed et ſolida ab his genita circa axem infinitum DC erunt in ratione ſuarum ſectionum circularium, ſive ut

qua-

cto I, non amplius ſibi occurrentes, eo quòd ratio HI ad ad BR ſemper futura eſt duplicata rationis HI ad BQ, ut de ipſis DXZ, DPR ſe in puncto D ſecantibus dicebatur. Et ideò ſpatium KOVQB, ad partes B infinitè protenſum, majus erit infinito ſpatio KDPRB (nec enim portio OVIPD, qua primum ſpatium à poſteriori deficere videtur, eſt in his computanda; quippe undecunque finita, adeoque infinitè parva reſpectu dictorum ſpatiorum, ſed attendi debet exceſſus QIR abſolutè infinitus, ut *in Scholio III.* demonſtrabimus) unde minor erit ratio ſpatii KDPRB ad KDXZB, quàm KOVQB ad idem ſpatium KDXZB, hoc eſt quàm ſit ratio quævis aſſignabilis, *n* ad *m*; ideòque ſpatium ab Apolloniana hyperbola comprehenſum, eſt infinitè parvum reſpectu ſpatii ab hyperbola quadratica definiti, & hoc viciſſim, reſpectu illius (licet abſolutè infiniti) eſt infinitè magnum, & ordinis ſuperioris, ſive *juxta definit. VII.* eſt *Plusquàm infinitum*; quod &c.

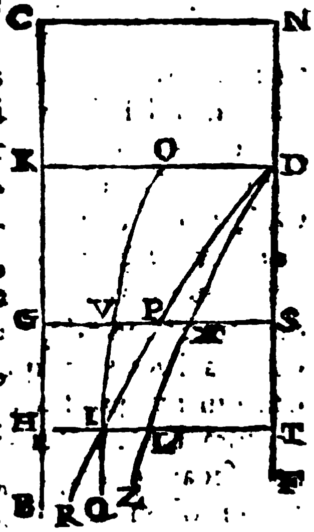


2. Si aliorum graduum ſuperiorum hyperbolæ per idem punctum D deſcribantur, in quibus cubi, vel quadratoquadrata, aut aliæ altiores poteſtates ordinatarum reciprocè reſpondeant abſciſſis, ſimili modo demonſtrabitur, areas hyperbolarum ſuperiorum infinitè majores eſſe areis inferiorum, quantumvis jam infinitis, vel plusquàm infinitis: ſupponatur enim DPR Quadratica hyperbola, & DXZ cubica, adeò ut hujus ordinatarum cubi, illius verò quadrata reciprocè ſint ut abſciſſæ; fiat autem, proportionali ſectione ordinatarum DK, XG poſterioris hyperbolæ, alia cubica hyperbola OVQ; eritque ſpatium KOVQB ad

ipſum KDXZB in ratione KO ad KD, puta *n* ad *m*. Ponè jam, curvâ DXZ perveniſſe ad intervallum LH, quòd ſit ad HT, vel KD, ut quadratum KO ad quadratum KD, ſive ut *nn* ad *mm*; occurrat autem hyperbola quadratica DPR ipſi ordinatæ HL in puncto I: eritque HI quadratum ad HL quadratum in ratione compoſita ex quadrato HI ad quadratum KD (ſive ratione cubi HL ad cubum KD, cùm utraque ratio ſit reciproca abſciſſarum C*K*, CH) & ratione quadrati KD ad quadratum HL, aut cubi *K*D ad quadratum HL ductum in altitudinem *K*D; quæ duæ rationes conflant rationem cubi HL ad quadratum HL in KD, nempe rationē HL ad *K*D, id eſt *ex conſtr.* quadrati KO ad quadratum *K*D. Cùm itaque HI quadratum ad quadratum HL ſit ut quadratum *K*O ad quadratum KD, patet ipſas KD, LH, in O, & I proportionaliter ſecari, adeòque punctum I pertinere ad cubicam etiam hyperbolam OVQ, quæ propterea ſecabit ipſam DPR in I, nec illi amplius occurret, eo quòd ſemper futurum ſit quadratum BR ad quadratum HI, ut cubus BQ ad cubum HI, ut antea oſtenſum eſt; quare ſpatium KOIQB, ad partes B infinitè protenſum, majus erit infinito ſpatio KDPRB, ut ſuperiori numero concludebamus, adeòque major erit ratio KDXLZB ad ſecundum, quàm ad primum, ad quod tamen eſſe poteſt in quavis aſſignabili ratione DK ad *K*O, ſive *m* ad *n*; unde liquet, ſpatium KDXZB infinitè adhuc majus eſſe ſpatio *K*DPRB ab hyperbola quadratica comprehenſo, licèt pluſquàm infinitum hoc ipſum anteà deprehenderimus. Quod &c.

3. Et ſi quælibet ipſarum GP, KD poteſtates ab exponente *e* indicatæ reciprocè reſpondeant abſciſſis, ordinatiſve alterius hyperbolæ GX, KD ad poteſtatem unitate ſuperiorem elevatis, ſemper his ipſis ordinatis in V, & O proportionaliter ſectis, curva OVQ occurret priori hyperbolæ DPR in I, ubi correſpondebit ordinatæ poſte-

rioris hyperbolæ HL, quæ ſit ad KD, ut poteſtas e ipſius KO ad poteſtatem ſimilem ipſius KD, unde renovabitur ſemper præcedens argumentum; idque generatim ſic oſtendetur. Sit KD $= a$ & hyperbolæ DXZ ordinata quævis GX, aut HL ponatur $= y$, quæ ſi proportionaliter ſecentur in O, V per curvam OVQ in ratione m ad n, occurrat hæc curva in I alteri hyperbo- DPR, cujus ordinata quævis GP, HI $= z$; ergo in concurſu I fiet $z = \frac{ny}{m}$, & $z^e = \frac{n^e y^e}{m^e}$; eſtque z^e ad a^e, ut y^{e+1} ad a^{e+1}, ergo $\frac{n^e y^e}{m^e}$ ad a^e, ut y^{e+1} ad a^{e+1}, & $n^e y^e a^{e+1} = m^e a^e y^{e+1}$, & rurſus dividendo per $y^e a^e$, erit $n^e a = m^e y$, indeque y ad a, ut n^e ad m^e, nempe ut poteſtas e ipſius KO ad ſimilem ipſius KD poteſtatem; Quod &c.



COROLL. I. Hinc conſtat, omnes hyperbolas altioris gradus ſupra Apollonianam verè *Pluſquam-infinitas* juxta VVallifii appellationem, & doctrinam cenſendas, utpotè infinities majores areis hyperbolicis ordinatiis ad aſymptoton refectis: & quantumvis proportionali augmento, aut decremento ſingularum ordinatarum, augeantur iſtæ, minuantur illæ, numquam hyperbolas unius generis poſſe cum hyperbolis alterius generis comparari.

COROLL. II. Conſequens etiam hinc eſt, in Arearum dimenſione non ſufficere, ut quædam illarum abſolutè infinitæ demonſtrentur, ſed ampliùs requiri, ut oſtendatur ad quem infinitorum ordinem, aut gradum pertineant: Quod facile eſt, obſervando ad quod infiniti aliunde noti genus rationem aſſignabilem habere poſſint: Verbi gratia.

Spa-

Spatium, à Conchoide Nicomedea cum aſymptoto contentum, infinitum eſt ejuſdem generis cum Spatio aſymptotico hyperbolæ Apollonianæ, cui comparari poteſt *ex prop. 21. noſtri libelli de Quadr. Circ. & Hyperb.* Item ſpatium à Quadratice Dinoſtrati ultra quadrantem continuata, & ab ejus aſymptoto comprehenſum, ad eandem claſſem ſpectat, ut ex ejus comparatione cum hyperbola Apolloniana, quam alibi exhibebimus, conſtare poteſt. Spatium quod curva Logarithmica, & recta ad ejus aſymptoton parallela interiicitur, ejuſdem ordinis eſt cum parallelogrammo infinitæ longitudinis, ſed infinities minoris, quàm ſit aſymptotus Apollonianæ hyperbolæ. Spatium hyperbolicum, circa axem infinitè productum excurrens, ejuſdem ordinis eſt cum infinito ſpatio angulari. Area curvæ, quæ ab Inſigni Geometra Hieronymo Sacherio in *Neoſtatica lib. 3. pr. 16.* infinita demonſtratur, ad aſymptotici ſpatii, quod Apollonii hyperbola complectitur, claſſem pertinere imò ad ejus dimenſionem referri oſtenditur: atque ita de aliis.

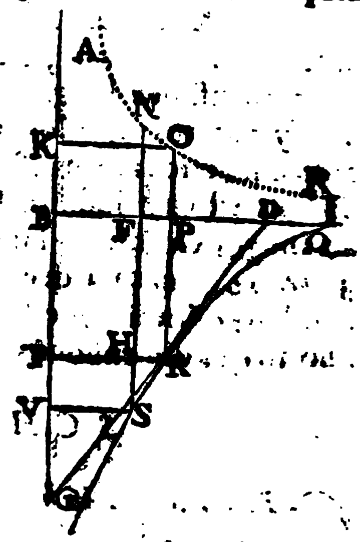
SCHOLION I.

Oportet autem in horum Spatiorum comparatione ſupponere eadem æquè infinitè *in longum protenſa, aliàs Infinitum ordinis inferioris æquari poterit Infinito ſuperioris ordinis ad infinitam longitudinem inferioris gradus, ſeu priori infinities minorem applicato; Cùm enim Spatium aſymptoticum hyperbolæ Apollonianæ ſit infinitum, utique æquivalet parallelogrammis inſcriptis multitudine infinitis, quæ ſi ad parem latitudinem componantur, efficient utique parallelogrammum infinitè longum, ipſi hyperbolico ſpatio æquale; ſed hæc ipſa infiniti parallelogrammi longitudo inferioris ordinis erit, ſive infinities minor infinita longitudine ſpatii hyperbolici: unde non mirum, quòd hoc modo ſimul utraque ſpatia adæquentur.*

At comparando parallelogrammum æquè infinitè longum, ac ſit hyper-

hyperbolicum ſpatium, quamlibet exigua fuerit parallelogrammi latitudo, ſemper, ex demonſtratis, erit parallelogrammum infinities majus ſpatio hyperbolico, quod ipſi aſymptoto adjacet: idemque intelligas de aliorum, quæ enumeravimus, ſpatiorum comparatione.

COROLL. III. Undè adhuc habetur, infinitam aſymtoton Logarithmicæ, ſeu Logiſticæ, infinitè minorem eſſe infinita aſymptoto hyperbolæ Apollonianæ. Nam quia Logiſticæ Q R S ſubtangens G T eſt ad quamlibet axi parallelam, P R, adeoque & quadratum T G ad rectangulum T G in P R, ut rectangulum hyperbolæ inſcriptum KOPB ad ſpatium hyperbolicum QR OP (ordinatis QR, PO interceptum) *ex cap. 6. Hugenian. n. 6.* fit, ut ſi parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum æquetur quadrato TG, etiam ſpatium quodvis hyperbolicum OPQR æquetur TG in PR, adeòque totum infinitum Spatium hyperbolicum ARQBA æquabitur rectangulo ejuſdem TG in aſymptoton Logiſticæ infinitè productam BG. Quare, ex præcedenti, erit longitudo ipſius BG infinitè minor longitudine aſymptoti hyperbolici BA.



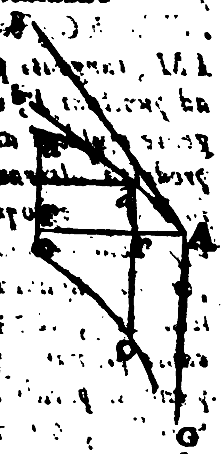
SCHOLION II.

I*Mò obſervatione dignum eſt, ſpatia quævis aſymptotica ſpatia, longitudini quidem infinita adjacere, ſed infinitè ſemper minori, quàm ſit aſymptotus hyperbolæ Apollonianæ. Nam & altiores hyperbolæ* [in figura ſequenti] *AEDFB, quæ parte ad* *aſym-*

aſymptoton CA ſpatium finitum comprehendunt, aſymptoton in-finitè minorem, quàm ſit hyperbolæ aſymptotus; obtinent; eo quod, cùm ſit ſemper ef *media inter KD, eg; erit etiam aſymptotus CA hyperbolæ [illegible] fDF, quæ parte finitam aream definit, ad aſymptotum C[illegible] hyperbolæ Apollonianæ gDG, in ratione minori qualibet data, qualem habet KD ad primam CA, quæ proportione media inter KD, & poſtremam CA; altioreſque hyperbolæ, quæ parte finitam aream adhuc minorē cum aſymptoto comprehendunt, habebunt, eadem ratione, aſymptotos adhuc infinitiès minores; ſicque ad infinitorum graduum infinitatis conſiſtentes. Similiter in Ciſſoide, in [illegible] lata quadrantis, aliiſque cujuſvis aſymptoticis, finitam aream comprehendentibus, obſervare erit, [illegible] aſymptotos longitudine infinities minorem eſſe aſymptoto hyperbolæ Apollonianæ.*

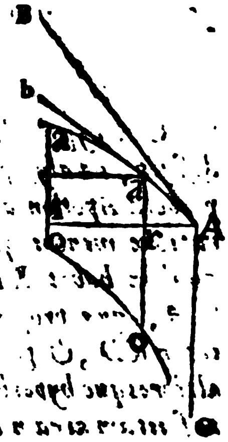


COROLL. IV. Hinc etiam [illegible] modus inveſtigandi, quando [illegible] aſymptoticum ArooG aream finitam [illegible] prehendat, quando verò infinitam, vel [illegible] pluſquam infinitam, reſpectu ordinatarum loci hyperbolici inter aſymptotos [illegible] intercipiat: Si nempe ſpatio ArooG [illegible] reciproca figura A *a r*, cujus [illegible] ordinatæ *r a* contineant cum ordinatis [illegible] eidem conſtanti quadrato æquale; [illegible] tangens *ab* hujus figuræ reciprocæ quæratur, & ejus generalis expreſſio referatur



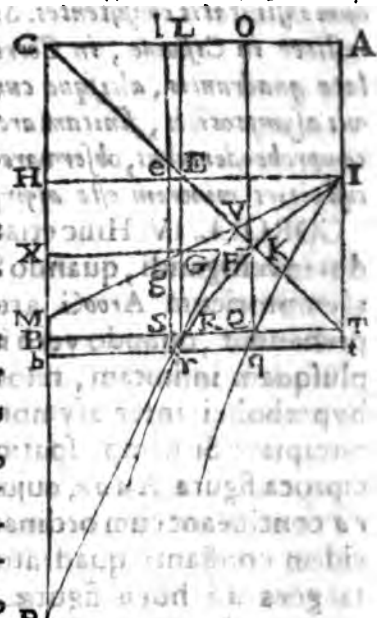
ad

ad verticem A, conſtabit certè, an ibi tangens AB fiat ordinatæ *ra* parallela, an verò cum ipſa concurrat, in diſtantia finita ab axe A*r*; an autem cum ipſo axe A*r* penitus coincidat; & in primo caſu Spatiū A*rob*G finitum erit: in ſecundo infinitum: in tertio pluſquàm infinitum. Innoteſcit autem ratio tangentis ducendi ex dictis *coroll. 2. prop. V.* undè generatim liquet, reciprocarū figurarū ſemper æquales fore ſubtangentes, ad oppoſitā partē accipiendas.



SCHOLIUM III.

Infinitum eſſe Spatium RIQ, quod ſecunda hyperbola axem primam exorbitat, ſic oſtendemus. Duæ hyperbolæ, Apolloniana, ſeu linearis IKR, & quadratica IQ, per idem punctum I, inter eaſdem aſymptotos CA, CB, ſint deſcriptæ. Ordinetur quælibet DRQ, ut factum videtur in figura. Ducatur aſymptoto CB parallela RG, occurrens in G rectæ IM, tangenti primam hyperbolam ad punctum I, & ducta RP, tangente ejuſdem ad punctum R, quæ producta alteram tangentium ferit in V; acceptoque in eadem prima hyperbola quotcunque proximo puncto r, per illud agantur ordinatim parallelæ brq, rSg, *& ad punctum CT ſecante primam hyperbolam in K, compleantur parallelogramma COKX, GBRL, AIHC. Jam propter Ac.*



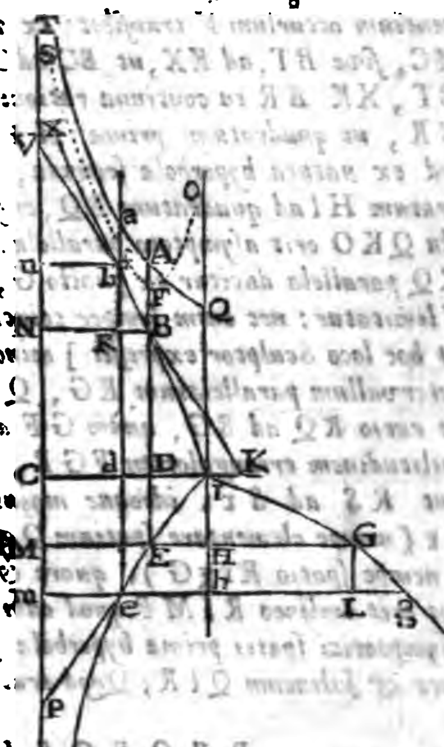
ſive CH *ad* CB, *ut* BR, *ſive* HE *ad* CB *vel* BT, *erit parallelogrammum* CHBL *ſimile ipſi* CBTA, *adeoque circa eandem diametrum* OT *conſiſtet; quare & CT erit diameter hyperbolæ* RKI, *ut potè biſecans ſubtenſam* RI, *quæ altera diameter eſt parallelogrammi* ERTI, *quare eadem* CT *per tangentium occurſum* V *tranſibit: ex 29. 2. Conic. Præterea cùm ſit* AC, *ſive* BT, *ad* KX, *ut* BC *ad* CX, *ſive ut* KX *ad* BR, *erunt* BT, XK, BR *in continua ratione, &* BT *vel* HI *ad tertiam* BR, *ut quadratum primæ* HI *ad quadratum mediæ* XK; *ſed ex natura hyperbolæ ſecundæ, ut* HI *ad* RB, *ita & quadratum* HI *ad quadratum* BQ, *ergo* XK *æquatur* BQ, *& juncta* QKO *erit aſymptoto parallela. Cum ſit autem* GF *(quæ ipſi* RQ *parallela ducitur ex puncto* G, *& à tangente* RV *in puncto* F *limitatur: nec enim ſemper coincidet* GF *cum ordinata* KX, *ut hoc loco Sculptor expreſſit] minor ſemper ipſa* RQ, *exiſtente intervallum parallelarum* RG, QK; *conſequens eſt, ut major ſit ratio* RQ *ad* RG, *quàm* GF *ad eandem* RG, *vel (ob ſimilitudinem triangulorum* FGR, RSr) *quàm* RB *ad* BP, *aut* RS *ad* Sr; *ideoque majus erit rectangulum* QR *in* Sr *(nempe elementare ſpatium* QqrR) *rectangulo* GR *in* RS *(nempe ſpatio* RrgG); *quare & totum bilineum* QIR *majus erit trilineo* RIMP: *quod cùm ſit infinitum [ob infinitatem aſymptotici ſpatii primæ hyperbolæ] pariter & fortiori infinitum fore & bilineum* QIR; *Quod erat demonſtrandum.*

PROPOSITIO

SPatium infinitum, idemque infinities majus Aſymptotico Spatio Apollonianæ Hyperbolæ, reperire.

Ne quis ſuſpicetur, ſpatium aſymptoticum hyperbolæ Apollonianæ minimum eſſe omnium infinitorum ſpatiorum, quia nullam hactenus aream novimus infinitam, quæ aut ejuſdem, aut ſuperioris gradus non ſit ad prædictum ſpatium: libet hoc loco aream deſcribere, abſolutè quidem infi-

infinitam, ſed infinities minorem dicto aſymptotico ſpatio Apolloniano: ex quo facile erit ſimiles areas adhuc infinities minores excogitare, & aſſertam varietatem ordinis Infinitorum *ſine ullo limite* (ut *prop. VIII.* prædiximus) admittendam oſtendere.

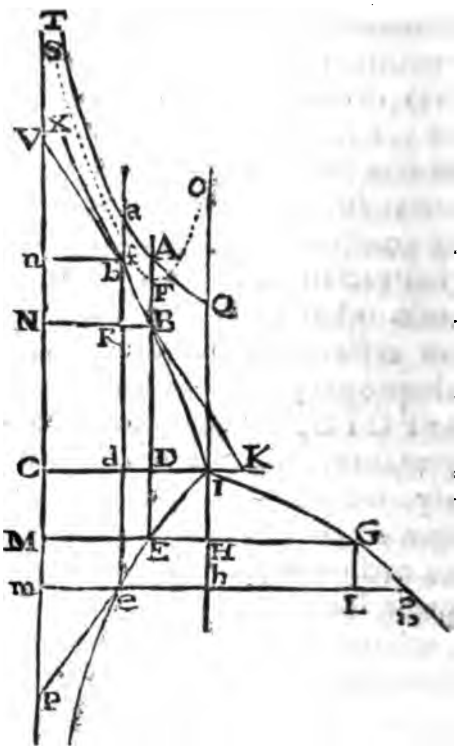


Inter aſymptotos CI, CV deſcripta ſit hyperbola Apolloniana QAaT, abſcindens primam ordinatam QI æqualem IC; & ſubtangente CI agatur Logarithmica IEe ad axem CP, cui parallela poſita Ih, fiat ad axem IH parabola IGg, cujus latus rectum ſit duplum ipſius CI, & productis ejus ordinatis GH, gh, logarithmicæ occurrentibus in E, e, ejuſque axi in M, m, agantur ad axem parallelæ EDA, *eda*; tum ut rectangulum ex MR in HG ad quadratum CI, ita ſit eadem CI vel IQ ad DF, ac per omnia puncta F, *f* ſic determinata tranſeat curva OF*f*S. Dico ſpatium binis aſymptotis parallelis IQ, CS, curva OF*f*S, & recta CI comprehenſum, abſolutè quidem eſſe infinitum, ſed infinities minus ſpatio hyperbolico CIQAaT.

Facta enim DB æquali HG, itemque *db* æquali *hg*, atque ita ſemper, orietur hinc alia curva IB*b*X; ſintque AFBDEHG, *afbdehg* infinitè proximæ: erit ipſarum BD, *bd* differentia *bR*, ex conſtructione, æqualis differen-

tiæ Lg correſpondentium HG, hg; eritque BR ad Rb, ut BR ad Lg, nempe in ratione compoſita ex BR, ſeu Dd differentia ordinatarum Logarithmicæ, ad Hh, ſive Mm differentiam axis ejuſdem, & ex Mm, ſeu GL differentia axis parabolæ ad Lg differentiam ordinatarum ejus; eſt autem *ex coroll. 2. prop. V.* prima ratio æqualis rationi ordinatæ ME ad ſubtangentem MP vel CI, & ratio altera æqualis rationi ſubtangentis parabolæ, ſeu duplæ IH, ad HG, vel duplæ HG ad latus rectum, aut ſimplicis HG, ad CI ſemiſſem lateris recti; ergo BR ad Rb eſt in ratione compoſita ex ME ad CI, & HG ad CI, ſcilicet ut rectangulum ex ME in HG ad quadratum CI, hoc eſt, ex conſtructione, ut CI, vel IQ ad DF; quare extremorum rectangulum ex FD in BR (quod eſt idem cum ſpatiolo infinitè parvo $FDdf$, *per coroll. 3. prop. V.*) æquabitur rectangulo mediarum IQ vel CI in Rb; quod cùm ubique perpetuò obtineat, manifeſtum eſt, totum ſpatium $SfFOIC$, ex omnibus areolis elementaribus $FDdf$ aggregatum, æquari rectangulo ex IQ vel CI in totam aſymptoton CX, quæ omnibus differentiis Rb ordinatarum æqualis eſt: adeoque cùm CX ſit infinita, utpotè æqualis ordinatæ parabolæ ad infinitam diſtantiam à vertice, patet, ſpatium illud $SfFOIC$ rectangulo infinito æquale probari, & ſic eſſe abſolutè infinitum: ſed hyperbolicum ſpatium $CIQAaT$ æquatur rectangulo ex eadem IQ, vel CI in totum axem infinitum CP Logarithmicæ (*nam, ex cap. 6. Hugenianorum n. 6.* ſubtangens CI eſt ad quamlibet DE parallelam axi Logiſticę, vel dicas CI quadratum ad CI in DE, ut parallelogrammum hyperbolę inſcriptū CDA, quod ęquatur quadrato CI, propter QI æqualem CI, ad ſpatium hyperbolicum $AQID$, quod exinde ęquabitur in hoc caſu rectangulo ex CI in DE, adeoque totum ſpatium aſymptoticum fiet æquale rectangulo ex CI in totum axem CP) erit ergo ſpatium $CIQAT$ ad ſpa-

tium SFOIC, ut infinitus axis Logarithmicæ, vel parabolæ, ad infinitam ejus ordinatam, ſive ut hæc ipſa infinita parabolæ ordinata ad ſuum latus rectum; adeoque in ratione majori, quàm quælibet aſſignabilis, quarè inventum eſt ſpatium abſolutè infinitum, ſed idem infinities minus aſymptotico ſpatio hyperbolæ Apollonianæ. Quod erat &c.



COROLL. I. Hinc obiter patet, curvæ IBb ſubtangentem KD eſſe ad ordinatam DB, ut rectangulum ME in HG, ſive NCDB, ad quadratum CI: in hac enim ratione vidimus eſſe differentias BR, Rb, quæ ſunt ſubtangenti, & ordinatæ proportionales ex ſupradictis.

COROLL. II. Unde etiã extenſa tangente *K* B ad aſymptoton in V, erit pariter BN ad NV (ſeu ſumpta communi altitudine NC, rectangulum NCDB ad rectangulum CNV) ut rectangulum NCDB ad quadratum CI; quare quadratum CI æquabitur CNV rectangulo, & ſubtangens NV æquatur conſtanti quadrato CI, diviſo per abſciſſam NC, ideſt reciproca eſt abſciſſæ NC, aut dicas æqualis ordinatæ in puncto N ad hyperbolam TAQ, uſque dum illi occurrat, continuatam, quippe quæ pariter ejuſdem NC eſt reciproca.

COROLL. III. Si quis ex puncto B duceret curvæ IBb perpendicularem, foret ſubnormalis, poſt ordinatam BD

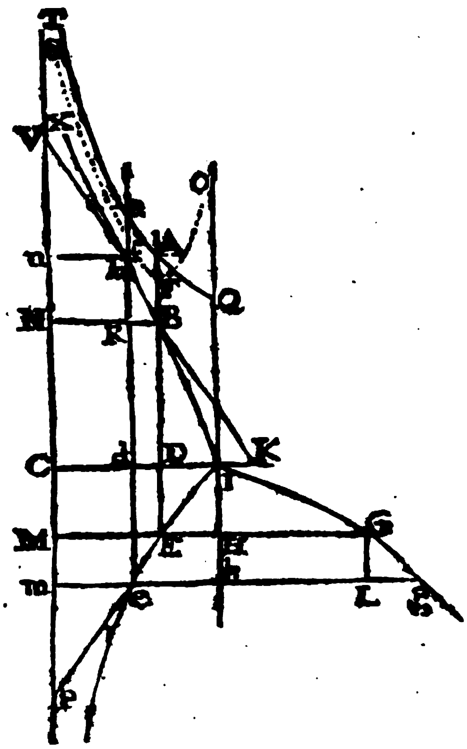
in

in ipſa DC producta ab hac perpendiculari reſecta, æqualis ordinatæ DA hyperbolæ: etenim eſt VN ad NB, ut BD ad DK, vel ut prædicta ſubnormalis ad ordinatam BD ſeu CN, adeoque rectangulum extremarum VNC [hoc eſt, *per præcedens corollar.* quadratum CIQ, vel rectangulum CDA, ob hyperbolam) æquatur rectangulo mediarum NB, vel CD in ſubnormalem, quare eadem ſubnormalis æquatur AD ordinatæ ad hyperbolam.

COROLL. IV. Unde amplius oſtendi poteſt, ſpatium hyperbolicum AQID æquari dimidio quadrati ex ordinata BD: poſita enim CD $= x$, DB $= y$, & dicta ſubnormali $= p$; erit p ad y, ut dy ad dx (nempe ut Rb ad RB) quare pdx [ſive, ob $p =$ AD, ſpatium ADda] $= ydy =$ dimidio differentialis $2ydy$, quæ *ex Schol. prop. V.* eſt differentia quadrati yy; & ideo, integrando, totum ſpatium AQID æquatur dimidio quadrati BD. Quod & hinc expeditiùs patet, quia ex oſtenſis in demonſtratione hujuſmet propoſitionis, ſpatium hyperbolicum AQID æquatur rectangulo ex CI in DE, vel IH, quadratum autem BD, vel HG, ex natura parabolæ, æquatur rectangulo ex eadem IH in duplam CI, quæ eſt latus rectum, ergo idem ſpatium hyperbolicum AQID eſt dimidium quadrati HG, vel BD.

SCHOLION

M*Anifeſtum eſt, curvam IB*b *eſſe Logarithmicam quadraticam, ex earum genere, quas* Hugenianorum cap. 1. n. 4. *indicavi, de quibus & egregium tractatum, geneſi à nobis perhumaniter accepta, conſcripſit inſignis Geometra* Laurentius Lorenzini, *quem utinam cum aliis tractatibus, res geometricas accuratiſſimè, & profundiſſimè illuſtrantibus, typis aliquando committeret! Enimverò patet, quòd cùm in prima Logarithmica IE*e *ſit ratio IC, ME ad rationem IC,* m e, *ut*

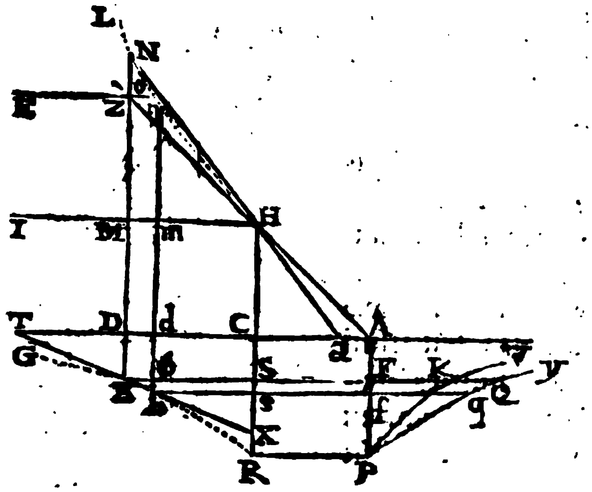


CM ad Cm, vel IH ad Ih: cujus rationis ſubduplicata eſt ratio ipſarum HG, hg, ſeu BD, bd, patet fore BD ad bd, ſive NC ad nC, in ſubduplicata ratione ejus, quam habet ratio duarum CI, NB ad rationem duarum CI, nb; aut illam rationem ad hanc eſſe, ut quadratum diſtantiæ CN ad quadratum diſtantiæ Cn. Similiter, ſi loco parabolæ quadraticæ IGg poſita fuiſſet alterius altioris ordinis parabola, ex ejus ordinatarum HG translatione in DB, orta fuiſſet alterius adhuc ordinis logarithmica, ejuſque tangens, & aliæ functiones ſimili inveſtigatione detegerentur.

PROPOSITIO XI.

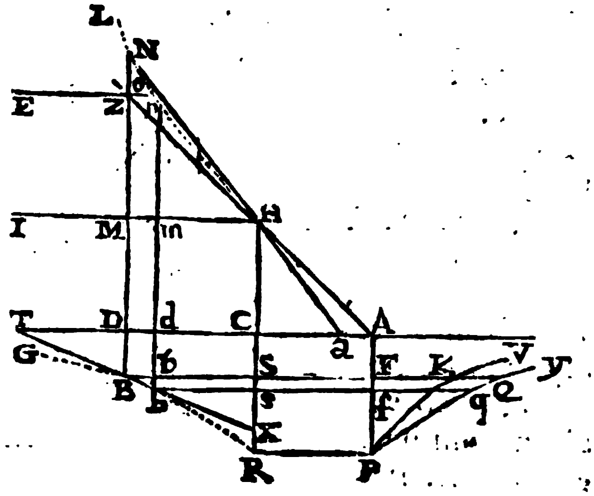
Q*Uadratica hyperbolæ cum Apolloniana ſpecialior comparatio, ad ejus altiorem infinitatem demonſtrandam.*

Sit inter aſymptotos RCA [*ut in figura ſequenti*] per angulum P quadrati RPAC deſcripta hyperbola Apolloniana PKV, & hyperbola quadratica PQY, in qua ſit SQ ad RP, ut quadratum RC ad quadratum CS, vel ut quadratum SK ad quadratum RP, adeoque tres SQ, SK, RP ſint perpetuò proportionales; deſcripta ſit etiam ad axem ACT Logiſtica RBG, ad partes G decreſcens, cujus



jus ſubtangẽs TD æquetur CR: atq; facta CH æquali CR, ponatur HNL continuatio ejuſdem Logiſticæ, quæ ex R ad partes AP exporrigi debebat, ad eaſdem partes aſymptoti CT reflexa, & eò verſùs in infinitum ſe expandens. Itaq; ob æqualem, imò eandem axis portionem CD, ordinatis BD, CR, & CH, DN interceptam, erit ſemper DB ad CR, ut CR vel CH ad DN, ſed etiam ut DB vel CS ad CR, ita in hyperbole Apollonianæ RP (vel CR aut CH) ad SK, ergo DN æquatur ſemper correſpondenti ordinatæ hyperbolicæ SK: factaque *adbsq* infinitè proxima priori; cùm ſit SQ ad SK, ut SK ad RP, vel ut AC ad CS, vel ut TD ad DB, vel ut Bb, aut Dd, ad bb vel sS, erit rectangulum extremarum QSs æquale rectangulo mediarum, ſcilicet SK, vel ND in Dd, & ſic ſemper, unde ſpatium hyperbolæ quadraticæ SRPQ *per coroll. 3. prop. V.* æquale oſtendetur correſpondenti ſpatio Logiſtico NHCD; ſed ex oſtenſis *in demonſtratione prop. præced. & in coroll. 3. prop. IX.* Spatium hyperbolicum SRPK æquatur rectangulo ex CR in logarithmum CS, ſcilicet in BS, hoc eſt, ducta HMI aſymptoto parallela, æquatur rectangulo correſpondenti CHMD, ergo ſpatia SRPQ, SRPK ſunt ſemper ad invicem, ut NHCD, MHCD; & ubi punctum S cadit in C, erit totum ſpatium hyperbolæ quadraticæ CRPQY ad ſpatiũ Apollonianæ CRPKV, ut

ut logiſticum ſpatium TCHNL in infinitam amplitudinē TL infinitæ longitudini CT reſpondentem diffuſum, ad rectangulum infinitè longum TCHI; ſed illud eſt infinities majus hoc, nam ex ipſo ſecari poſsūt quot quis voluerit æqualia rectangula infinitè longa TCHI, IMZE, &c. ergo & Spatium hyperbolæ quadraticæ CRPQY eſt infinities majus ſpatio Apollonianæ hyperbolæ abſolutè infinito CRPKV, adeoque jure potuit à VVallisio *Pluſquam infinitum* nuncupari. Quod erat &c.



COROLL. I. Cùm *ex noſtris Hugenianis cap.* 3. *n.* 6. Spatia Logiſtica æquè alta NDCH, BDCR ſint ad invicem, ut homologæ ordinatæ CH, BD, ſive ut rectangulum CHMD ad rectangulum CDBS, & permutando ſpatium NDCH ad CHMD, hoc eſt, juxta hanc propoſitionem, ſpatium SRPQ ad SRPK, erit, ut ſpatium logiſticum BDCR ad inſcriptum rectangulum CDBS.

COROLL. II. Extenſa tangente TB uſque ad CR in X, quoniam ex dictis *Hugenianor. cap.* 7. *n.* 3. & *cap.* 10. *n.* 8. rectangulum CDBS æquatur rectangulo ſubtangentis DT, vel CR in SX, & ſpatium BDCR *ex ibidem dictis cap.* 4. *n.* 3. & *cap.* 8. *n.* 14. æquatur rectangulo ejuſdem ſubtangentis in SR, erit itaque ſpatium SRPQ ad ſpatium SRPK ut SX ad SR.

COROLL. III. Unde rurſus liquet, integrum ſpatium hy-

hyperbolæ quadraticæ CRPQY eſſe infinities majus ſpatio Apollonianæ CRPKV, adeoque *pluſquam infinitum* cenſendum; etenim ubi S cadit in C: tum rectangulum CDBS evaneſcit, aut ſaltem fit infinitè minus ſpatio integræ logiſticæ TCRBG, ſeu quadrato ſubtangentis CR: tum ipſa SX evadit infinitè parva reſpectu SR, quæ tunc fit CR; undè ſpatiũ hyperbolę Apollonii CRPKV, evadat infinities minus ſpatio hyperbolæ quadraticæ CRPQY neceſſe eſt.

COROLL. IV. Rurſus, quia ſpatium SRPQ ad SRPK oſtenſum eſt eſſe, ut NDCH ad MDCH; eſt autem NDCH æquale rectangulo ex ſubtangente logiſticę CH in MN, erit primum ſpatium ad ſecundum, ut NM ad MH; ſed NM ad MH poteſt rationem habere majorem qualibet aſſignabili, ſi concipiatur accedere magis, ac magis punctum S ad centrum C, adeoque ab eodem C magis ac magis recedere ordinata logiſticæ DN, nam MN ultra tangentem HZ, quæ ad angulum ſemirectum ZHM, ſive HAC inclinatur, in immenſum exſcreſcit, unde ratio NM ad MZ, vel MH, ſemper fit major, prout (juncta NH*a*) fit ſemper ſine limite major ratio HC ad C*a*; ergo NM evadit infinities major, quàm MH, ubi punctum S cum puncto C convenerit, & ideo ſpatium CRPQY erit tunc infinities majus ipſo CRPKV, ac proinde *pluſquam infinitum* hac etiam ratione colligitur.

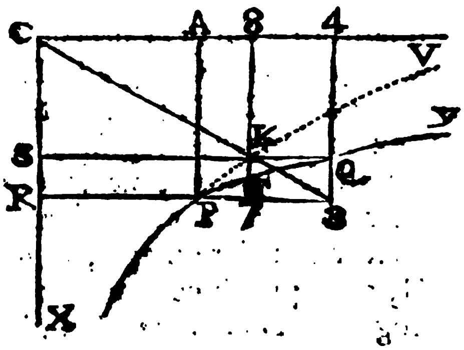
SCHOLION.

EX oſtenſis in hac propoſitione, quòd DN, ordinata figuræ HNL, ſit ſemper æqualis correſpondenti SK, ordinatæ hyperbolæ PKV, colligitur expeditus modus generalis deſcribendi data cuilibet figuræ RBG ſuam Reciprocam HNL: deſcripta enim hyperbola Apolloniana PKV, quia ſemper rectangulum CSK æquatur ipſi CRP, fit, ut ſi ad puncta D, C ordinentur ipſę DN, CH æquales reſpectivè ipſis SK, RP, utique etiam rectangula NDB, HCR æquentur, adeoque figura HNL evadat Reciproca ipſius RBG.

PROPOSITIO XII.

I*Dem aliter rurſus, ad abundantiorem ſcientiam, demonſtrare.*

Iiſdem poſitis, ducatur C *K*, conveniens cum R P productâ in 3, & jungatur 3 Q occurrens aſymptoto CA in 4; eritque R 3 ad S *K*, ut R C ad CS, ut S *K* ad R P, vel ut SQ ad S *K*; igitur æquales erunt R 3, SQ, unde 3Q4 erit aſymptoto R S C parallela, cui per *K* æquidiſtans pariter fiat 7 *K* 8; Jam verò ex demonſtratis *cap.* 8. *Hugenianorum*, *n.* 11. Spatium infinitè longum, ab hyperbola quadratica P Q ad partes aſymptoti S R versùs X infinitè producta comprehenſum, eſt finitæ quantitatis, & ſemper æquatur inſcripto rectangulo eidem ordinatæ adiacenti, nempe RSQPX æquatur CSQ4, & ſolum R P X æquatur C R P A, vel huic æquali C S K 8; ideoque utriuſque differentia, nempe ſpatium SRPQ æquatur reſiduo 8 4 Q K, vel æquali complemento S K 7 R, quod eidem latitudini S R adiacet cum ſpatio SRPQ, ſed longitudinem habet æqualem applicatæ correſpondenti SK hyperbolæ Apollonianæ, atque ita ſemper; ergo ubi congruerit SK aſymptoto CA, fiet integrum ſpatium CRPQY æquale rectangulo ex CR in aſymptoton hyperbolę Apollonii CAV; ſed hoc rectangulum, *ex prop. VIII. n.* 2. eſt infinities majus ſpatio aſymptotico hyperbolæ Apollonii, ergo ſpatium C R P Q Y quadraticę hyperbolę eſt infinities majus dicto ſpatio Apollonianę hyperbolæ, unde à Cl. VValliſio jure *Pluſquàm Infinitum* dici potuit. Quod erat &c.



COROLL. I. Ex quo ſpatium SRPQ oſtenſum ſit æquale rectangulo SK7R, ablato communi SRPEK, erit KEQ = ipſi KEP, & appoſito communi 7EQ3, fiet PEQ3 æquale K73Q.

COROLL. II. Unde & ſpatium SRPQ ad PEQ3 erit, ut SKQ4 ad 7KQ3, nempe ut CS ad SR, & componendo, RSQ3 ad PEQ3 erit, ut CR ad RS, ac per converſionem rationis, RSQ3 ad SRPQ, ut CR ad CS.

COROLL. III. Quia verò ſpatium SKPR = rectangulo ex CR in logarithmum CS (*vide fig. pag.* 70.) nempe in SB ex *coroll.* 9. *prop. IX.* erit SKPR ad SQPR in ratione compoſita ex CR, vel RP, ad SK, & ex logarithmo CS, nempe SB, ad SR, ideſt in compoſita ratione ex SC ad CR, & SB ad SR, hoc eſt ut rectangulum Logiſticæ inſcriptum CSBD ad rectangulum ex CR in RS, ſive ad Logiſticum ſpatium CDBR: quod conſonat jam oſtenſis *coroll.* 2. *prop. præced.* unde rurſus eadem inferri poſſunt, quæ deinceps in ſequentibus corollariis demonſtrata ſunt de *altiori Infinitate* hujus ſpatii.

SCHOLION.

H*Actenus multipliciter probavimus diverſitatem ordinis Infinitorum a Varignonio controverſam, idque iis argumentis, quibus ſubeſſe poſſe hallucinationem, de ſumendo expreſſione ſpatiorum ejuſmodi ad contrarias partes, omninò non video; hac enimverò exceptione Vir graviſſimus uſus eſt adversùs VVallſium, ſcilicet ipſum non obſervaſſe, negativum valorem arearum hyperbolicarum ſuperiorum Apollonianæ, non indicare altiorem infinitatem ipſarum, ſed contrariam duntaxat poſitionem, adeout finitam quidem quantitatem exprimat, ſed ad oppoſitas partes accipiendam: quod ipſum antea monuerat* Georgius Cheyneus *Collega noſter, libro Londini impreſſo* 1703 De Methodo Fluxionum inverſa, pag. 66. *his verbis*: Quodſi quadraturæ expreſ-

preſſio affirmativa fuerit, area adjacet tam abſciſſæ, quàm ordinatæ: ſin negativa fuerit, cadit ad partes contrarias, & adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ: *ubi etiam ſtatim ſubdit exemplum* infinitarum hyperbolarum. *Quam ſanè legem nos minimè improbamus, & ſaltem in hyperbolarum caſu (ex accidentine, an ſuapte generali natura, hic non inquiro, ſed vide dicenda infra* in Epiſt. ſubjuncta poſt Lemm. 12.) *obtinere fatemur: quemadmodum & idem, independenter à Cheynæi libello ipſis nondum viſo, animadvertendum cenſebant anno* 1704 *Doctiſſimi Viri, quos Bononiæ conveneram, & quibuſcum de hac Infinitorum materia, deque natura negativarum quantitatum in Marſiliano Muſæo diſſerebam, videlicet* Euſtachius Manfredi *Matheſeos Profeſſ. celeberrimus, &* Victorius Stanchari, *quem Geometria, Analytica, Phyſica, & Aſtronomia ſibi nunc [heu nimis immaturè!] mortis invidia præreptum dolent; neque tamen magnitudinum pluſquàm infinitarum exiſtentiam negabat ullus ipſorum, ſed varios infiniti gradus exprimendos potius arbitrabatur Stanchariùs per rationem* aa *ad* o, *aut* a^3 *ad* o, *vel* a^4 *ad* o *&c. (ſeu per duplicatam, triplicatam, quadruplicatam &c. rationis ſimpliciter infinitæ* a *ad* o) *quàm per rationem poſitivi ad negativum,* a *ad* − 1, *vel* a *ad* − 2; *neque enim ſignum negativum reddere quantitates nihilo minores, ut multis ratiociniis confirmabat, ſed ad partem oppoſitam duntaxat retrocedentes: quare & expreſſionem negativam hyperbolarum pluſquam infinitarum, verificari ſatis, accipiendo ipſarum aream ad plagam oppoſitam, ubi valor ipſarum finitus eſt. Extant adhuc apud me doctiſſimi Juvenis epiſtolæ, quas poſt meum in Ethruriam reditum, 13 Junii, 10, & 24 Julii dicti anni* 1704, *his de rebus tranſmiſit, ut ſententiam ſuam clariùs exponeret. Sed, hac doctrina admiſſa, non ideò conceſſerim Varignonio, aut* Pluſquam infinitum *contradictionem involuere, cùm aliunde, quàm per quantitatum nihilo minorum expreſſionem probari poſſit, aut in aſſertione hyperbolarum pluſquam infinitarum hallucinatum proptereà fuiſſe Walliſium, quòd non animadver-*

verit, negativas quantitates, aream contraria poſitione accipiendam ſignificare: nam in Algebra ſua cap. 66, & 67 *expreſſè hanc doctrinam ipſemet VVallisius firmaverat, & diſertis verbis* Volum. 2. Op. Math. pag. 286. *dixerat*: Impoſſibile eſt, quantitatem ullam negativam eſſe, impoſſibile eſt enim, ut ulla magnitudo ſit minus quàm nihil, aut ullus numerus paucior quàm o. Nec tamen eſt ea ſuppoſitio aut inutilis, aut abſurda, modò rectè intelligatur. Quamvis enim quoad puram notationem algebricam, innuere videatur nota — magnitudinem, quæ minor ſit, quàm nihil; cùm tamen phyſicam ſubit conſiderationem, magnitudinem non minùs realem denotat, quàm ipſum †; Sed ſenſu ſuppoſitioni contrario interpretandam. Verbi gratia ſiquis promoveri ſupponatur 5 paſſibus; atque tum retrocedere paſſibus 2; atque tum interroget quiſpiam, quantò promotior ſit factus? Dicetur 3 paſſibus promotior, propter $5 - 2 = 3$; ſi autem, poſtquam proceſſerat, 5 paſſibus, retrocedat paſſibus 8; atque tum interroget quis, quantò ſit promotior? reſpondebitur -3 paſſibus (propter $5 - 8 = -3$) hoc eſt tribus paſſibus minùs promotus &c. *Quod & aliis exemplis geometricis deinceps oſtendit; itaque non inficiatur VVallisius, negativas quantitates oppoſitum ſitum reſpicere, quoties datam habent poſitionem, ut quælibet phyſica, & geometrica magnitudines habent: at ſi de numeris purè abſtractis ſermo ſit, qui à ſitu non pendent, quomodo eos Algebra verſat: hoc modo, inquam, cur minores nihilo dici non debeant numeri negativi, cùm reſultent ex majorum ſubtractione à minoribus? Si 4 ex 7 ſubtraho, video relinqui †3; ſi 4 ex 4 auſero, relinqui o, ſeu merum nihil; ſi 4 ex 1 auferam, an non minus quàm nihil ſupererit? an contendam ſupereſſe idem, quod ſupereſt ablatis 4 ex 7? hoc certè dicendum foret, ſi — 3, quod eſt reſiduum ſubtractionis 4 ex 1, poſitivè accipi deberet pro tribus unitatibus majoribus nihilo, ſed inverſum ſitum [quem vero ſitum in his abſtractis à materia, & à loco mihi fingam?] ſervantibus. Quidquid id eſt, inductum*

ſaltem à VVallisio, & à præſtantiſſimis Geometris admiſſam; ulteriorem Infinitatis Ordinem, licet unâ Varignonii exceptione [ut meriſ utrinque ſolidis] non infringi, manifeſtum eſt, quippe argumentis nulli exceptioni minimè obnoxiis, & ejuſmodi Infinitorum, ultra negativæ quantitatis naturam ſuperaſſentium, [illegible] non pendentibus, ejuſmodi [illegible] propugnatum, & abundè confirmatum hîc dedimus. Tanta enimverò ſemper apud me fuit Cl. Varignonii auctoritas, ut neque uni duntaxat ratiunculæ fidens ab ejus ſententia diſceſſurus, nec niſi poſtquam, in omnem partem hoc argumentum verſato, ſibimet ubique conſtans ulterioris Infinitatis [illegible] [illegible] explicitiùs exprimere potui, VVallisianam doctrinam [illegible] dederim, nec prætermiſerim à primis uſque initiis ſatis magnâ hujus myſterii rationem ex ordine deducere; & cùm Vir Cl. [illegible] per æſtivas ferias hunc Tractatum legendum [illegible], [illegible] [illegible] (quòd nonnulla, quæ ex noſtro Hugeniano [illegible] Theoremate [illegible], abs ſe non ante perlecto, [illegible] [illegible] [illegible] fuiſſent) ſententiam ſuſpenderet, prolixam Epiſtolam, in qua expreſſam Lemmatum omnium hoc pertinentium demonſtrationem, aliunde quàm ab elementis planis, & conicis non repetitam, propoſui, & contraverſa hyperbolica ſpatia Plusquam infinita verè cenſenda eſſe inde rurſus conclusi, illumque denique ad aſſenſum mirabilis hujus veritatis adegi, atque [illegible] deinde ipſi ſcrupulum, unum vel alterum diſſolutum [illegible] [illegible] expeditum, penitùs [illegible]. Itaque hanc ipſam Epiſtolam, Lectorum omnium uſui pariter profuturam, hîc adnectere placuit, opportunam huic Tractatui [illegible] hac Appendice [illegible] poſituras.

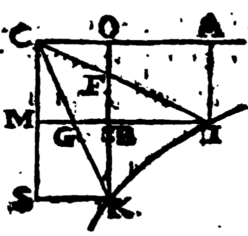
EPISTOLA GEOMETRICA

Ad Illuſtriſſimum Equitem

D. ASCANIUM LIPPI

ARETINUM.

REditum tibi in Patriam proſperum gratulor, Vir Illuſtriſſime, teque acriori, quàm antea, ſtudio Geometricarum, ac Mechanicarum rerum contemplationi animum impendere decreviſſe, lætus accepi. Interim verò obſcuriorem tibi accidiſſe non paucis in locis Tractatum noſtrum, *De Infinitis Infinitorum, atque Infinitè parvorum Ordinibus*, quem ſuperioribus æſtivis feriis tibi legendum obtuli, mirari deſino, poſtquàm retuliſti, Hugeniana noſtra, ex quibus multæ harum demonſtrationum pendent, à te minimè hactenus fuiſſe perlecta. Ne tamen animo deſpondeas, ad hujus enim admirabilis Veritatis lucem, quam tantoperè tibi manifeſtari deſideras, me facem præferente, ſtatim admitti poteris, ubi nonnullis Lemmatibus id omne ſuppleverò, quod noſtræ demonſtrationis progreſſus aliunde perſpectum ſupponit; ſit ergo.

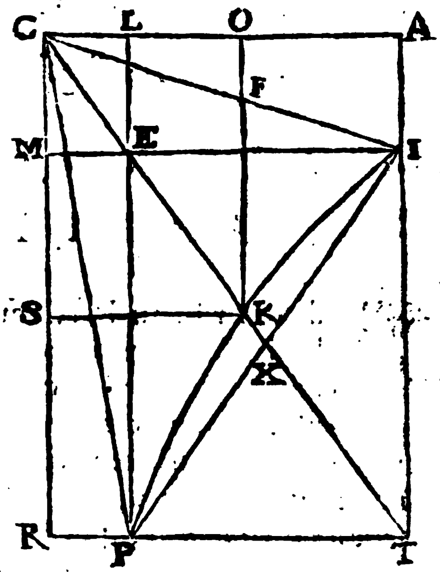


LEMMA I. *Ex punctis quibuslibet I, K Hyperbolæ Apollonianæ KI, ductis alteri aſymptoto parallelis IA, KO, junctiſque ad centrum C rectis IC, KI, erit ſector hyperbolicus KCI æqualis quadrilineo OAIK.*

Nam parallelogrammorum CAIM, COKS (*ex* 12. 2. *conic.*) æqualium,

dimi-

dimidia ſunt triangula CAI, COK, quæ ideò æqualia ſunt, & communi ablato triangulo COF, appoſitoque utrinque trilineo FIK, manifeſtum eſt, ſectorem KCI æquari quadrilineo OAIK.



COROLL. Hinc patet quadrilinea KIAO, KIMS eidem ſectori CIK, adeoque & invicem eſſe æqualia.

LEMMA II. *Sint in aſymptoto CA tres rectæ proportionales CL, CO, CA, & ad hyperbolam ordinentur alteri aſymptoto parallelæ LP, OK, AI: Erit punctum K vertex portionis PKI.*

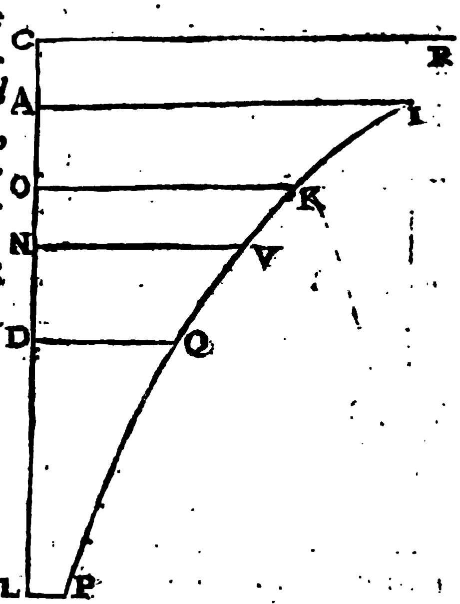
Completis parallelogrammis, ut in figura, erit ex natura hyperbolæ, CL ad CO, ut reciprocè OK ad LP, quare etiam ipſa CO ad CA, ut OK ad AT: & ideò parallelogrammum COKS erit ſimile ipſi CATR, & circa eandem diametrum CT (26. 6. *elem.*) conſiſtet; ſimiliter cùm ſit OK ad AI, vel ipſi parallelam LE, ut AC ad CO, vel CO ad CL, erit & parallelogrammum CLEM circa eandem diametrum ipſorum COKS, CATR; & quia ET, PI ſunt diametri parallelogrammi EITP, ſe mutuò ſecabunt in X; Igitur recta CX, quæ ex centro biſecat applicatam PI, diameter erit portionis, & per ejus verticem tranſibit; oſtenſa eſt autem tranſire per punctum K, ergo K eſt vertex dictæ portionis.

LEMMA III. *Iiſdem poſitis, quadrilinea AIKO, OKPL, quæ ordinatis ad terminos continuè proportionalium intercipiuntur, æqualia erunt.*

Nam

Nam & triangulum XCI æquatur XCP, & portio XKI æqualis eſt portioni XKP, cùm diameter KX biſecet applicatam PI, & portionem PKI: quarè ſectores KCI, KCP, adeoque & quadrilinea AIKO, OKPL, *ex lemm.* 1. æquabuntur.

LEMMA IV. *Si fuerint LC, CD, & OC, CA proportionales, ordinatis inde ad hyperbolam LP, DQ, & OK, AI, intercepta quadrilinea LPQD, OKIA pariter æqualia erunt.*



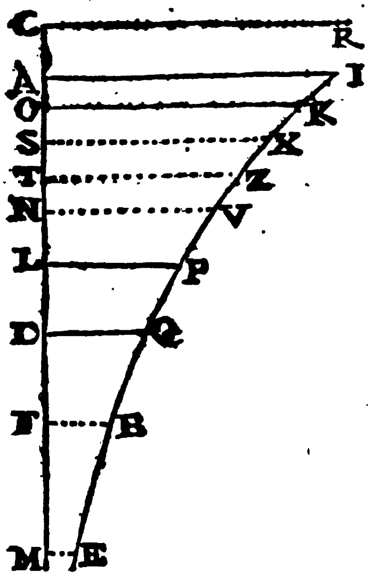
Sumpta inter DC, OC media proportionali NC, hæc media erit etiam inter LC, AC propter rectangulum LCA æquale ipſi DCO, ſeu quadrato CN; ergo ordinata NV, erit *ex lemm. præced.* quadrilineum ANVI æquale quadrilineo NLPV, itemq. ONVK æquale NDQV; quare & reſidua AOKI, DLPQ æqualia manebunt.

LEMMA V. *At ſi major, aut minor foret ratio LC ad CD, quàm OC ad CA, eſſet quadrilineum LPQD major pariter, aut minus, ipſo OKIA.*

Quippe auctâ CL, augeretur primi quadrilinei extenſio; & illâ decreſcente hæc pariter minueretur.

LEMMA VI. *Ordinentur ad hyperbolam dua qualibet AI, OK, & dua alia LP, DQ, erit ratio duarum OC, CA ad rationem duarum DC, CL, ut quadrilineum IAOK ad PLDQ.*

Multiplicetur enim utcunque ratio duarum OC, CA, ſum-

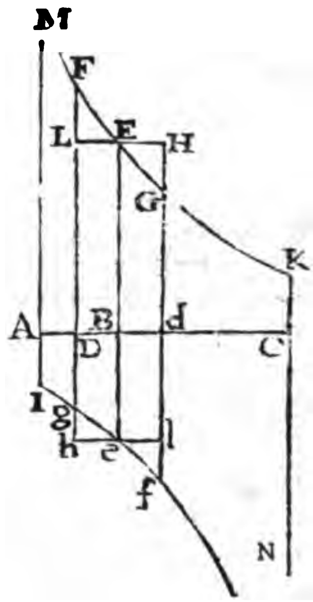


ſumptis quotlibet continuè proportionalibus SC, TC, NC, quibus reſpondebunt, *per lemma 3.* æqualia quadrilinea prioribus ordinatis, aliiſque SX, TZ, NV interjecta: adeò ut quàm multiplicata fuerit ratio NC, AC rationis OC, AC, tam multiplex reſultet quadrilineum NVIA quadrilinei IAOK. Similiter multiplicata utcunque ratione DC, LC per quotlibet continuè proportionales FC, MC, oſtendetur æquè multiplex fore quadrilineum PLME ipſius PLDQ: & quidem ſi ratio NC, AC æqualis fuerit rationi MC, LC, etiam quadrilineum VNAI *per lemma 4.* fiet æquale ipſi PLME; ſin prima ratio major, aut minor fuerit ſecunda, etiam *per lemma 5.* primum quadrilineum fiet altero majus, aut minus; quare ut ratio OC, AC, ad rationem DC, LC, ita quadrilineum IAOK ad ipſum PLDQ, ob antecedentium æquè multiplicia præfato modo reſpondentia æquè multiplicibus conſequentium, ut exigit terminorum proportionalitas *ex def. 6. 5. elem.*

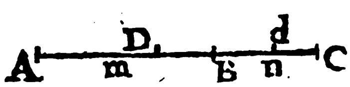
LEMMA VII. *Si recta AC* (ut in fig. ſequenti) *ſecta utcunque in B, iterum ſecetur in D, inter A & B, aut inde, inter B, & C, erit ratio duarum BA, DA ad rationem duarum DC, BC in majori proportione, quàm BC ad AB: at ratio duarum DA, BA ad rationem duarum BC, dC in minori proportione erit, quàm BC ad AB.*

Per terminos A, C ductis parallelis KCN, IAM, & facta CK æquali AI, ex *K*, & I ducantur duæ hyperbolæ æquales KGEF, *Igef*, inverſo ſitu poſitæ in angulis aſym-

aſymptoticis CAM, ACN, ad quas ordinata per punctum B recta EB*e*, reliquis aſymptotis parallela, & per puncta D, *d* pariter ordinatis FD*g*, G*df*, per puncta E, *e* ducantur ipſi AC parallelæ LEH, *leh*; eritque *per lemma 6.* ratio duarum BA, DA, ad rationem ipſarum DC, BC ut ſpatium FEBD ad DB*eg*, hoc eſt in minori ratione, quàm [diminuto antecedente, & aucto conſequente] quæ ſit parallelogrammorum EBDL, *e*BD*b*, ſive quàm EB ad B*e*, aut BC ad AB (nam æqualia ſunt parallelogramma æqualibus hyperbolis inſcripta EBA, *e*BC, adeoque latera habent reciproca) At è contrario ratio duarum *d*A, BA ad rationem ipſarum BC, *d*C eſt *ex eodem lemm. 6.* ut EG*d*B ad B*dfe*, quæ ratio minor eſt, quàm (aucto antecedente, & minuto conſequente) parallelogrammorum EH*d*B, B*dle*, ſeu quàm EB ad B*e*, ſcilicet BC ad AB; & igitur major eſt in primo, & minor in ſecundo caſu proportio dictarum rationū, quàm ſit ratio partium BC, AB, ut fuit propoſitum.



LEMMA VIII. *Eſto AB ad BC in ratione qualibet*, m *ad* n. *Dico, factum ex poteſtate ipſius AB, cujus index* m, *in poteſtatem ipſius BC, cujus index* n, *eſſe omnium ſimilium maximum, ideſt majus, quàm ſi, alibi ſecta AC in D vel* d, *ſumeretur factum ex ſimilibus earum partium poteſtatibus per eoſdem indices denominatis.*

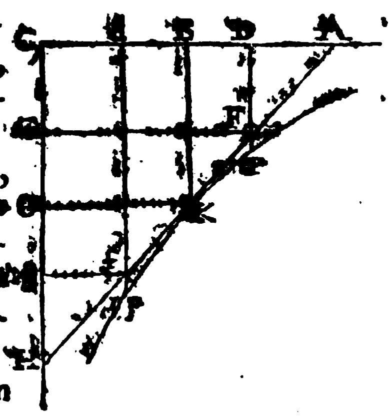


Nam quia ratio duarum AB, AD ad rationem duarum DC, BC eſt in minori proportione, *per lemma 7.* quàm BC ad AB, ideſt quàm *m* ad *n* per hypotheſim, erit fa-



ctum extremorum majus facto mediorum id eſt ratio duarum AB, AD multiplicata per m [ſeu ratio $\overline{AB}^m$ ad ipſum $\overline{AD}^m$] major erit ratione DC, CB multiplicata per n [hoc eſt ratione $\overline{DC}^n$ ad $\overline{CB}^n$] unde rurſus factum extremorum $\overline{AB}^m$ in $\overline{CB}^n$ majus erit facto mediorum $\overline{AD}^m$ in $\overline{DC}^n$. Similiter oſtendetur, quòd cùm ſit rationis duarum dA, AB, ad rationem ipſarum BC, dC, minor proportio, quàm BC ad AB, ſeu quàm n ad m, erit prima ratio multiplicata per m (hoc eſt $\overline{dA}^m$ ad $\overline{AB}^m$) minor ſecunda multiplicata per n (id eſt $\overline{BC}^n$ ad $\overline{dC}^n$) & ideò factum extremorum $\overline{dA}^m$ in $\overline{dC}^n$ minus erit facto mediorum $\overline{AB}^m$ in $\overline{BC}^n$; quare ipſum $\overline{AB}^m$ in $\overline{BC}^n$ eſt omnium ſimilium maximum.

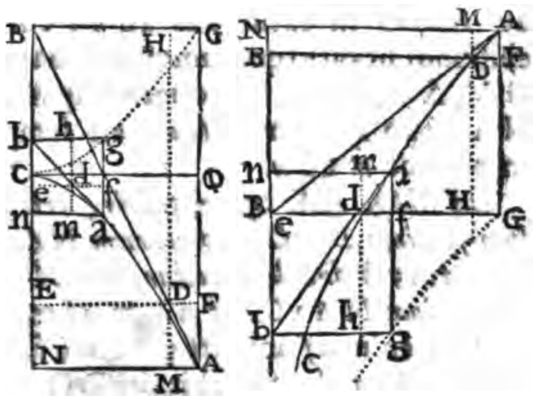
LEMMA IX. *Inter aſymptotos ACH ſit qualibet ex infinitis hyperbolis PKp, cujus ea proprietas, ut poteſtas ordinata KB denominata ab* m, *ad ſimilem alterius ordinatæ PD poteſtatem, ſit reciprocè, ut alterutra poteſtas abſciſſæ à centro DC, cujus index n, ad ſimilem abſciſſæ BC poteſtatem. Dico, quòd ſi fiat AB ad BC, ut* m *ad* n, *juncta AK hyperbolam tanget in K.*



Occurrat AK ordinatæ PD in F; eritque factum ex $\overline{CB}^n$ in $\overline{BK}^m$ ad factum ex $\overline{CB}^n$ in $\overline{BA}^m$, ut $\overline{BK}^m$ ad $\overline{BA}^m$, ſive ut $\overline{DF}^m$ ad $\overline{DA}^m$, vel ut productum ex $\overline{CD}^n$ in $\overline{DF}^m$ ad productum ex $\overline{CD}^n$ in $\overline{DA}^m$; atqui $\overline{CB}^n$ in $\overline{BA}^m$, *ex lemm. præcedenti*, cujus hypotheſi caſus hic congruit, majus eſt quàm $\overline{CD}^n$ in $\overline{DA}^m$, ergo (*per* 14. 5. *elem.*) etiam $\overline{CB}^n$ in $\overline{BK}^m$ (vel $\overline{CD}^n$ in $\overline{DP}^m$, ipſi æquale, ob reciprocam poteſtatum rationem) majus eſt quàm $\overline{CD}^n$ in $\overline{DF}^m$; major eſt igitur DP, quam DF, & ideò pun-

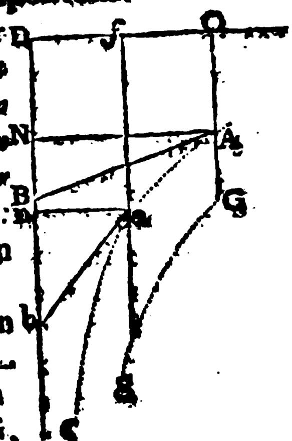
punctum hyperbolæ P eſt ultra rectam K A, idque ubique contingit, ergo A K in ſolo puncto K hyperbolæ occurrit, ipſamque tangendo prætergreditur.

LEMMA X. *In qualibet figura C A N, ſi ad terminos A, a ordinatarum AN, an, ordinentur rectæ AG, ag axi B N parallelæ, æquales verò reſpectivis ſubtangentibus NB, nb, erit figura GgaA æqualis figuræ AanN, cui correſpondet.*

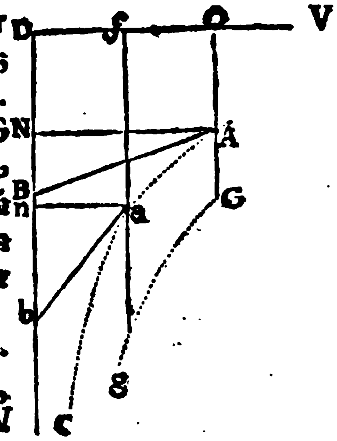


Has figuras *cap.* 8. *Hugenianor. n.* 2 Correlatas appellabam, earumque æqualitatem (ſuppoſitis infinitè proximis G A N, H D E) demonſtravi *ex* 43. *1. elem.* propter æqualia Elementaria parallelogramma D F G H, D E N M, itemque *dfgh*, *denm*, quæ ſunt complementa parallelogrammorum circa diametrum A B, ſive *ab*. Quare conſtat propoſitum.

LEMMA XI. *Eſto A a C qualibet ex infinitis hyperbolis ſupra deſcriptis, & ſint poteſtates ordinatarum A N, a n, quarum index* m, *reciprocæ poteſtatibus abſciſſarum* n *D, N D, quarum index* n, *& ducantur AO,* a f *ordinata ad aliam aſymptoton: erit ut* m *ad* n, *ita quadrilineum N A* a n *ad quadrilineum O A* a f.



Extenſis enim O A, *fa* ad G, & *g* in ratione *n* ad *m*, fiat alia hyperbola ejuſdem generis G *g*, quæ erit correlata priori, *ut in lemm.* 10. eo quòd AG, *ag* æquentur ſubtangentibus N B, *nb*, ad quas abſciſſæ ND, *n*D



*n*D [æquales ipſis OA, *fa*] pariter ſunt *ex lemm.* 9. in ratione *n* ad *m*; quare ſpatium A*ag*G æquatur *ex lemm.* 10. ſpatio A*an*N; eſt autem A*ag*G ad A*af*O in ratione *m* ad *n* (cùm ejuſmodi ſit ratio quarumvis ordinatarũ GA, AO, & *ga*, *af*) quare & ſpatium NA*an* ad ſpatium OA*af* eſt ſemper in ratione *m* ad *n*.

LEMMA XII. *Iiſdem poſitis, erit totum ſpatium DOaC ad portionem NAaC, ut* n *ad* m; *& dividendo rectangulũ DOAN ad ſpatium NAaC, ut* n − m *ad* m.

Ubi enim *af* infinitè proxima fiet aſymptoto DN, ſpatium OA*af* degenerabit in DOA*a*C, & ſpatium NA*an* in NA*a*C, quarè cùm ejuſmodi ſpatia OA*af*, NA*an* ſint ut *n* ad *m*, patet integra quoque DOA*a*C, NA*a*C eſſe in eadem ratione, & dividendo inſcriptum rectangulum ad ſubſequentem aream fore, ut *n* — *m* ad *m*;

Nimirum ſi *n* ſit major ipſo *m*, in ratione aſſignabili, quam habet ipſorum differentia ad datum *m* (ut propterea in hoc caſu ſit utriuſque areæ finita ratio); ſi *n* æquatur *m*, ut in hyperbola Apolloniana, ratio prodibit infinitè parva o ad 1. [unde in hoc caſu area hyperbolica infinitè major eſt inſcripto parallelogrammo] ſin fuerit *n* minor ipſo *m*, habebitur ratio minor quàm infinitè parva, quę ſcilicet foret negativi numeri minoris nihilo (appello *minorem nihilo* in hoc caſu negativum numerum, quia non applicantur nunc numeri ad certas quantitates, aliquam datam poſitionem ſervantes, ut ad oppoſitam plagam inverti poſſint, ſed abſolutè conſiderantur, & in abſtracto, tamquam exponentes, qui rationes quantitatum repræſentant, independenter à quolibet ipſarum ſitu) ad unitatem, vel alium numerum poſitivum (unde tunc aream hyperboli-

boli-

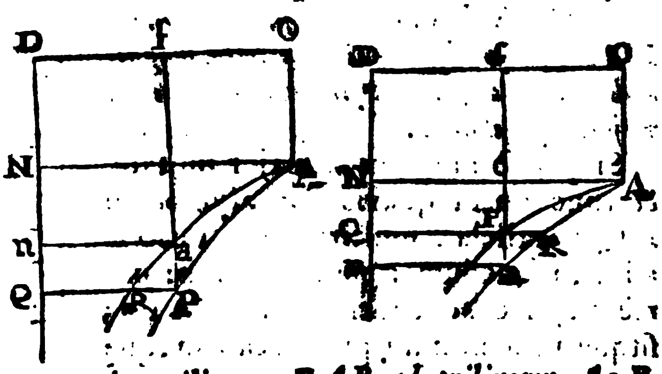
bolicam pluſquam infinities ſuperare inſcriptum parallelogrammum Cl. VVallisius contendit) putà ſi n exiſtente 1 fuerit m æqualis 2, fiet parallelogrammi ratio ad aream hyperbolicam quæ — 1 ad 2: ſi fuerit m æqualis 3, fiet illa ratio — 2 ad 3, atque ita deinceps; quas quidem rationes, patet non eſſe ſubduplam, aut ſubſequialteram, intercedentem inter aliquem ex terminis, qui comparantur, inverſo ſitu acceptum (ut prætendit Varignonius) & reliquum eodem loco manentem, licèt hoc ipſum verificari contingat, quia nempe area N A a C ad reliquam DNAV, quæ, trans ordinatam, ad partes oppoſitas vergit, ſemper invenitur eſſe, ut $m - n$ ad $n - m$ [ut facilè deducitur ex præmiſſis, & utramlibet ad inſcriptum parallelogrammum, velut ad m, comparando] itaque alterutra eſt ut differentia exponentium negativa, vel poſitiva, nempe ſi m ſuperet n numero b, erit prima ad ſecundam ut b ad $-b$, ſin major fuerit n, quàm m eadem differentia, erit illa ad hanc ut $-b$ ad b, cùm ſimili lege utraque area ad utramque aſymptoton referatur, mutatis dumtaxat ordinatarum poteſtatibus in poteſtates abſciſſarum, & contra; Sed quemadmodùm in caſu Apollonianæ Hyperbolæ, cujus ratio ad inſcriptum parallelogrammum eſt n ad $n - n$, ſive 1 ad 0, non contendit Varignonius, conſequens rationis 0 indicare in antecedenti *nullam magnitudinem* (quaſi in ipſam ordinatam AN, unde originem ducit, contraheretur area hyperbolica) ſed *abſolutè infinitam*, licèt interim in rebus phyſicis, aut geometricis quantitatibus, datam poſitionem, ex determinata origine, ſervantibus, quoties contingit, quantitates illas, puta a, & b, invicem æquari, tunc $a - b$ æquetur 0, & in nihilum abeat, ſive retrocedens exactè quantitas b ad præcitatam originem ipſius a nec citra conſiſtens, nec ultra procurrens, in ejuſdem a principium contrahatur, ibique, in non quantum ſui generis degenerans, evaneſcat: ita in caſu altiorum hyperbolarum, ubi ratio

paral-

parallelogrammi ad aream hyperbolicam ſubſequentem eſt $o - m$ ad m, ſive -1 ad 2, aut -2 ad 3 &c. non videtur præſumendum, ex negativo antecedente, indicari conſequentis areæ tranſpoſitionem faciendam ad aliam partem ordinatæ, ut paſſim in magnitudinibus ſitum habentibus, ſi ex ſua origine in determinatam plagam protenduntur a, & b, ſitque illa minor, hæc major differentia c, itaut $b = a + c$, tunc $a - b = a - a - c = -c$, & hæc eſt poſitiva quantitas retrorſum ab origine computata, in adverſam partem ab illa, verſus quam ſe extendere a, & b ſupponebantur; Sed imò hinc concludere licet, dictum parallelogrammum ad conſequentem aream, ut minus quàm nihil, comparari, adeo ut hæc illud ſuperet plusquàm infinitè: quin potius, ſi negativa expreſſio quodpiam invertendum concluderet, ipſum parallelogrammum, quod eſt homologus comparationis terminus quantitatis negativæ -1, vel -2, ſitum mutare deberet, non area hyperbolica, quæ homologa eſt poſitivo termino et exponenti 2, aut 3 poſitivæ unitatis; quemadmodum in expreſſione Apollonianæ hyperbolæ, ad quam dictum parallelogrammum eſt, ut 0 ad 1, idem parallelogrammum, velut nihilum reputatur reſpectu areæ infinitæ hyperbolicæ, non è contrario area hyperbolica in nihilum degenerat: ſed hæc obiter dicta ſint in VValliſiani argumenti defenſionem, cujus cauſa tamen ab hoc puncto non pendet, cùm nec mihi propoſitum ſit ab ejuſmodi analytica expreſſione variorum infinitatis graduum evidentiam repetere (qui ſanè hinc non ſatis commodè eliciuntur, alteram aream hyperbolicam alteri ſuperioris ordinis comparando, & in hoc tantùm VValliſii ratio deficere videtur) ſed potius geometrica oſtenſione, ut videbimus, quæ hanc negativi ſigni ambiguitatem nihil moratur.

LEMMA XIII. *Per idem punctum A tranſeant duæ hyperbolæ, Apolloniana ſcilicet AH, & quædam alia AP, cujus ordinatarum PQ pote-*

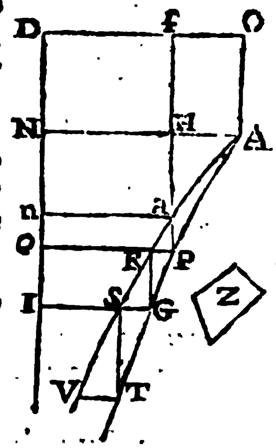
poteſtas m *reciprocè reſpondeat abſciſſis DQ, & ex quolibet ejus puncto P ad aſymptotos parallela agātur PQ, Pf, occurrentes priore hyperbola in* R, a: *erit trilineum RAP ad trilineum AaP, ut* m *ad* 1.



Cùm in hyperbola Apolloniana quadrilinea AanN, AafQ ſint æqualia (*per coroll. theor.* 1. *ſive ex lemm.* 26. ... m, æquales, quibus dicta ſpatia proportionantur) appoſito, aut dempto communi trilineo PaA, fiet ſpatium NAPn æquale PfQA; ſed PANQ ad PfQA, *per lemm.* 21. eſt, ut m ad 1, ſive, in hoc caſu, ut m ad 1; ergo idem PANQ etiam ad NAPn erit, ut m ad 1; ſed etiam QRAN ad NAan eſt ut ratio duarum mD, DN, per lemm. 26. ſcilicet pariter ut m ad 1 (quia prima ratio ſemel accepta æquatur ſecundæ per m multiplicatæ, cùm ex hypotheſi ſit QD ad DN, ut ... ad ..., vel ..., id eſt ut ... ad ...), ergo & reliquum RAP ad reliquum AaP eſt in eadem ratione m ad 1. Quod erat &c.

COROLL. Hinc conſtat, dividendo in prima figura, eſſe RPa ad AaP, ut m − 1 ad 1: at in ſecunda figura, eſſe RPa ad AaP, ut 1 − m ad 1; & RaP ad RPA in prima figura eſſe, ut m − 1 ad m: at in ſecunda figura eſſe, ut 1 − m ad m, unde ſi in primo caſu m æquatur 2, vel in ſecundo m æquatur dimidio unitatis (hoc eſt ſit exponens radicis quadratæ) patet, rectam Pa primæ figuræ, bifariam dividere trilineum ARP, & rectam RP ſecundæ figuræ ſimiliter bifariam ſecare trilineum AaR.

LEM.

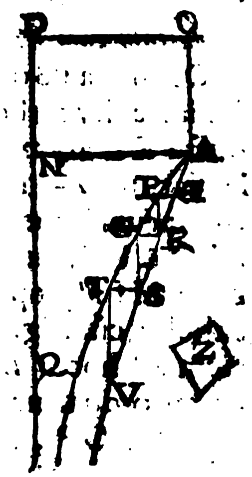


LEMMA XIV. *Iiſdem poſitis, ex bilineo R A P utrique hyperbola interſectio, magnitudinem data qualibet finita quantitate Z majorem ſecabimus.*

Sit primò numerus *m* major unitate, & tunc ducta quavis P*a* aſymptoto DQ parallela, multiplicetur ratio *m* ad 1, uſquedum æqualis, aut proximè major evadat ratione Z ad A P a; ſitque ratio ſic multiplicata eadem, quę producti ex numero *r* in *m*, ideſt *rm* ad 1. Tum ducta P R aſymptoto D O parallela, agatur R G parallela D Q, deinde S G, S T, T V alternatim aſymptotis parallelę, idque in tot punctis P, G, T continuetur, quoties multiplicata fuerit ratio *rm* ad 1. rationis *m* ad 1. Quia igitur ſpatium A V T ad ſpatium A P *a* rationem habet compoſitam ex intermediis rationibus, A V T ad A T S, A T S ad A S G, A S G ad A G R, A G R ad A R P, & A R P ad A P *a* (omnibus majoris inæqualitatis) quarum prima, tertia, & quinta (aliæque impari loco poſitæ ſi plures fuerint) æquantur ſemper *ex lemm.* 13. rationi *m* ad 1. quæ ſimul compoſitæ eandem rationem multiplicant juxta acceptum numerum punctorum P, G, T, adeoque ex ſe ſolis conflarent rationem *rm* ad 1. ideſt æqualem, aut proximè majorem ratione Z ad A P *a*, patet utique, rationem A V T ad A P *a*, quæ ex recenſitis, & inſuper ex ſecunda, quarta, aliiſque pari loco poſitis componitur, longè majorem eſſe ratione Z ad A P *a*, ideoque ſpatium A V T multò majus fore propoſito ſpatio Z.

Sin autem fuerit *m* [*ut in figura ſequenti*] minor quàm 1, tunc ipſa P*a* ducatur parallela DO, & ratione 1 ad *m* viciſſim multiplicata, uſque dum fiat ratio *r* ad *m* æqualis, aut proximè major ratione Z ad A P *a*, continuetur

in



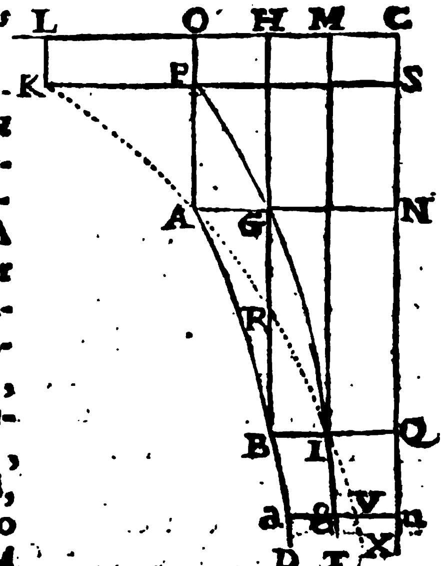
in totidem punctis flexilineū aPRGSTV ex lineis alternatim parallelis ad aſymptotos, & eodem ratiocinio colligetur, ſpatium ATV ad AP*a* majorem rationem habere, quàm Z ad AP*a*, quia ſolæ rationes ATV ad ATS, nec non AGS ad AGR, & APR ad AP*a* [ſingulæ *ex lemm.* 13. æquales rationi 1 ad *m*] componerent rationem *r* ad *m*, multiplicatam ſcilicet ipſius 1 ad *m*, pro numero punctorum P, G, T; Quare conſtat, in hoc etiam caſu, ex bilineo RAP ſecari poſſe ſpatium TAV majus qualibet finita magnitudine propoſita Z. Quod erat &c.

COROLL. Hinc patet, ſpatium hyperbola Apolloniana ARV, & quavis alia APT interceptum, eſſe magnitudinis abſolutè infinitæ, poteſt enim ad finitum ſpatiū AP*a* rationem habere majorem qualibet aſſignabili.



LEMMA XV. *Sit hyperbola Apolloniana AIV, & alia quælibet ABaD, cujus ordinatarū AN, an poteſtates, per numerum* m *(unitate majorem) denominatæ, reciprocè reſpondeant abſciſſis* nC, *NC: tum per ſectionem quarumvis aſymptoto parallelarum AO, BH, in punctis* P, G, *in qualibet aſſignabili ratione, putà* f *ad* 1, *fiat hyperbola PGT ipſi ABaD proportionaliter analoga. Dico, PGT convenire alicubi, velut in I, cum Apolloniana hy-*

na hyperbola AIV, & alterius productam eam ſecare.



Ordinata PS occurrat Apollonianæ hyperbolæ in K, & ducta KL aſymptoto parallela, fiat, ut $m - 1$ ad 1, ita quadrilineum hyperbolicũ OLKA ad OAIM, reſectum pariter recta MI aſymptoto CQ parallela; cùm igitur illud ſpatium ad hoc (*lemm. 6.*) ſit, ut ratio duarum LC, CO, ſive AO, OP, nempe f ad 1, ad rationem duarum OC, CM, erit, ut $m - 1$ ad 1, ita ratio f ad 1 ad rationem OC ad CM, & componendo, ut m ad 1, ita compoſita ratio ex f ad 1, & OC ad CM (nempe ratio fOC ad CM) ad ipſam rationem OC ad CM; unde productum extremorum æquabitur producto mediorum, ideſt poſterior ratio multiplicata per m ſeu ratio $\overline{CO}^m$ ad $\overline{CM}^m$ æquabitur ſimplici rationi fCO ad CM, compoſitæ ſcilicet ex f ad 1, ſive AO ad OP, & CO ad CM, aut IM ad AO, quæ duæ rationes conſtant rationem IM ad OP: ſed ut $\overline{CO}^m$ ad $\overline{CM}^m$, ita ex natura curvæ PGT eſt etiam MI, quę ex M aſymptoto CQ parallela uſque ad curvam PGT ducitur, ad eandem OP; igitur eadem eſt IM ad Apollonianam, & MI ad hanc hyperbolam noviſſimè ductam; quare utraque hæc curva in puncto I conveniet; deinceps autem, $\overline{QI}^m$ ad $\overline{gn}^m$ [poſita ng ordinata ad hanc hyperbolam PIT, nV verò ordinata ad Apollonianam ARV] ſeu nC ad CQ, vel QI ad nV, majorem habebit rationem, quàm QI ad gn, & ideò nV minor erit quàm ng, quare manifeſtum eſt, utramque curvam ſe invicem ſecare in I, & curvam PGI ex interiori

 fieri

fieri exteriorem Apollonianæ hyperbolæ. Quod &c.

His poſitis, atque attentiùs perſpectis, facillimè demonſtrabitur præcipuum noſtrum.

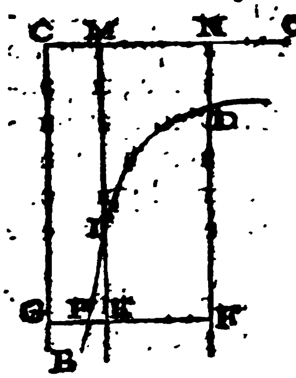
THEOREMA.

Cujuslibet hyperbolæ Apollonianæ altioris, ſpatium aſymptoticum eſt Pluſquam : Infinitum *cenſendum.*

Intelligatur ARIVX hyperbola Apollonii, & per idem punctum intra eaſdem aſymptotos QCO deſcripta ſit hyperbola quælibet, cujus ordinatarum AN, *an* poteſtas ab exponente *m*, qui major ſit unitate, denominata, reſpondeat abſciſſis reciprocè acceptis *n*C, NC. Dico ſpatium *n*COABD, ad partes D infinitè productum, eſſe infinities majus ſpatio abſolutè infinito Apollonianæ hyperbolæ *n*COARV æquè in infinitum producto: adeoque illud eſſe *Pluſquam Infinitum*.

Aſſignetur enim quælibet ratio majoris inæqualitatis, *f* ad 1; & ſingulis aſymptoto CQ parallelis AO, BH &c. in tali ratione ſectis ad puncta P, G &c. ducta ſit hyperbola PGT, priori ABD proportionaliter analoga, quæ [*lemm.* 15.] ſecabit Apollonianam hyperbolam alicubi, velut in I; bilineum autem VIT (*per coroll. lemm.* 14.) erit abſolutè infinitum, adeoque infinities majus terminato ſpatio PGIRA; & appoſito communi ſpatio *n*COPGIVX, fiet *n*COPGI*g*T abſolutè majus ſpatio *n*COARIVX; & ideo ſpatium NCOAB*n*D majorem habebit rationem ad hoc ſecundum, quàm ad illud primum: ſed ad illud (ob proportionalem ſingularum parallelarum OA, HB ſectionem ad P, G in ratione *f* ad 1) eſt in aſſignabili quavis ratione *f* ad 1; ergo ad hoc ſecundum rationem habet majorem qualibet aſſignabili; infinities igitur ipſum ſuperat, adeoque eſt *Pluſquam Infinitum*. Quod erat demonſtrandum.

Nunc ad ſecundas tuas exceptiones accedo. Illud in primis opponis, quomodo fieri poſſit, ut omne aſymptoticum ſpatium, velut CNDIB, infinities minus aſſeri poſſit circumſcripto parallelogrammo CNF, ut ego ſæpius aſſerui: cùm tamen, ſi intelligatur Vas priſmaticum datæ altitudinis æqualis CN, baſim habens ipſum aſymptoticum ſpatium, aqua, vel alio fluido repleri, tum amota curva ſponda DIB, permittatur aqua fluere uſque ad ſpondam NF alteri CG parallelam, adeo ut adaptetur priſmati, baſim nunc habenti parallelogrammum infinitè longum CNF, conſequens videatur, ut ad aliquam altitudinem, ſi non æqualem priori, ſaltem ad aliquam ad ipſam ratione aſſignabili, eadem aqua aſſurgat, ac dicere cogamur, infinitam molem aquæ vix ſufficere ad madefaciendum duntaxat infinitè longi parallelogrammi ſuperficiem, nec tantam eſſe, ut ſupra fundum vaſis CNF vel tantillum elevetur, quod abſurdum ab omnibus cenſendum fore arbitraris. Ad hæc, ſi in parallelepipedum, ſuper determinato quadrato CN in longitudinem infinitam erectum, aquam illam, quæ prius intra priſma finitæ altitudinis CN, ſed infinitam aſymptoticam aream pro baſi obtinens, concludebatur, immiſſam concipiamus, utique ad infinitam altitudinem fore elevandam obſervas, adeoque congruere poſſe priſmati, baſim habenti infinitum parallelogrammum, finitam verò altitudinem; & ſic non eſſe cenſendum aſymptoticum ſpatium infinities minus parallelogrammo circumſcripto. Poſtremò auctoritatem neſcio, an rationem Cl. V. Galilæi obiicere identidem non prætermittis, quippe qui *Dial. 1. de novis ſcientiis* non poſſe invicem comparari infinitas magnitudines, exemplo radicum, quadratorum,



torum,

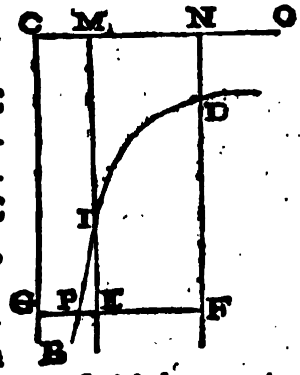
torum, ac cuborum ex omnibus numeris ſelectorum evincit, unde vocabula majoris, minoris, & æqualis locum non habere in Infinitis ſtatuit, eoque minùs admiſſurum hæc noſtra *Pluſquam Infinita* arbitraris, qui ne rationem quidem aſſignabilem in ejuſdem generis Infinitis agnoſcit: unde ſæpius repetis, cavendum, ne mirum in modum hallucinemur, dum tam audacter infinitas quantitates, finitæ noſtræ mentis captum excedentes, verſare non dubitamus, ac de iiſdem, perinde ac de finitis, per analyticos calculos, geometricos diſcurſus, ac figurarum diagrammata, diſcurrere præſumimus.

Quibus hæc breviter poſſe reponi obſervo. Primò nihil abſurdi eſſe, quòd aqua illa, quæ vas priſmaticum aſymptotale CNDIB implebat, applicata Vaſi parallelepipedo ſuper parallelogrammo CNF erecto, vix ejus fundum madefaciat, nec ad ullam finitam altitudinem à ſua baſi elevetur, ſed tantùm ad infinitè parvam, adeout quàm infinities minus eſt ſpatium aſymptoticum CNDIB circumſcripto parallelogrammo CNF, tam infinities minor ſit reciprocè altitudo, ad quam in hoc parallelepipedo aſſurget aqua, altitudine CN prioris priſmatis, ut generatim in omnibus ſolidis æqualibus contingere neceſſe eſt: ac demum illud idem in hoc caſu dicendum eſſe, quod quis diceret, ſi ex finito aliquo, quantumvis magno, aquarum receptaculo, putà ex toto oceano, effundi intelligeretur aqua in immenſam planitiem, ſeu ſuperficiem infinitam, cui adhærendo, certè non poſſet in ullam datam altitudinem elevari, ſed illam vix humectaret: eodem quippe modo finitum oceani fundum ſe habet ad immenſam planitiem, ut infinita area aſymptotica ad circumſcriptum parallelogrammum, quod illa oſtenditur infinities majus.

Secundò, ſi aqua illa replens priſmaticum Vas aſymptotale, infunderetur parallelepipedo baſim habenti da-

tum

tum quadratum rectę CN, ſed interminatam altitudinem; utique intra illud ad altitudinem infinitam erigeretur, ſed tamen infinities minorem, quàm ſit longitudo ſpatii aſymptotici: nimirum ſi area aſymptotica fuerit hyperbolæ Apollonianæ, erit altitudo priſmatis æqualis infinito axi Logiſticæ, ſeu Logarithmicæ, ſubtangentem habentis æqualem ipſi NC lateri quadrati hyperbolico ſpatio inſcripti: nam ejuſmodi ſpatium aſymptoticum ſæpius oſtendimus æquari rectangulo ex dictâ NC in axem præfatum Logiſticæ, ut quævis aſymptotici ſpatii terminata portio æquatur rectangulo ejuſdem NC in rectam axi Logiſticæ parallelam, ejuſque curvę, & aſymptoto hyperbolæ interpoſitam; itaque cùm dicimus, ſpatia hujus generis aſymptotalia



eſſe infinities minora rectangulo quovis infinitè longo, intelligendum eſt de longitudine æquè infinita, ac ſit longitudo dicti ſpatii: ſeu de rectangulo ipſi circumſcripto, & qualibet ejus parte proportionali, per ſubdiviſam illius latitudinem reſecta: non autem id aſſerimus de quovis infinito rectangulo indiſcriminatim. Vide Scholion I. ſubiectum *coroll. 2. prop. IX. pag. 59.* hujus tractatus.

Tertiò ad Galilæi ſive auctoritatem, ſive rationem, reſpondeo, me nullatenus dubitare, ſi viveret nunc temporis Vir Clariſſimus, & tot Illuſtrium Mathematicorum, qui hos diverſos infinitorum gradus mecum agnoſcunt, fundamenta perpenderet, inſignemque hujus doctrinæ uſum in geometricis, & phyſicis problematibus ſolvendis agnoſceret, aut eorum auctoritati & rationi ſuam liberè, & ſyncerè poſtpoſiturum, aut ſaltem fore, ut mirabilia hæc profundioris Geometriæ arcana, ſin minùs probaret, certè debita veneratione ſuſpiceret, eoque loco haberet, quo

ſua

ſua Paradoxa de puncto æquali peripheriæ, aliiſque hujuſmodi, habenda eſſe à cæteris Mathematicis voluit. Cæterùm, re maturiùs, atque attentiùs penſata, fortaſſe Vir Lynceus animadverteret, ex omnibus poſſibilibus numeris, nedum plures, ſed infinities plures eſſe radices, quàm quadratos; & adhuc infinities plures quadratos eſſe, quàm cubos, & ſubinde ſemper infinities minorem eſſe multitudinem altiorum poteſtatum: quemadmodum & facilè colligeret, omnium prorſus numerorum multitudinem eſſe duplam multitudinis imparium dumtaxat, vel dumtaxat parium numerorum; itemque eandem omnium numerorum multitudinem triplam eſſe illorum multitudinis, quos ternarius numerare poteſt; &c. Ad rationem verò dubitandi, an non totidem cenſendi ſint quadrati, aut cubi, quot radices &c. cùm cuilibet radici ſuum reſpondeat quadratum, & ſuus cubus: itemque an non totidem ſint omnes prorſus numeri, quot ſoli pares, aut ſoli illi, qui à ternario numerantur, cùm cuivis prorſus numero ſuus duplus (qui par eſt) poſſit aſſignari, itemque ſingulis correſpondeat ſuus triplus [quem ideò ternarius metitur] &c. ipſummet reſponſurum arbitror, hæc omnia falſa eſſe, ſi ad æqualem terminorum numerum cujuſvis generis numerorum ſeries prorogari intelligatur: ut enim ab 1 ad 10, vel ad 100, vel ad 1000. &c. ſemper falſum eſt tot eſſe radices, quot quadrata, quot cubi, quot pares numeri, quot à ternario numerati, etenim quos Galilæus ait aſſignari poſſe ſingulis radicibus quadratos, cubos, itemque duplos, & triplos &c. extra ſeriem acceptam exiſtere certum eſt: ita etiam ſi in multitudine majori qualibet data, juxta ejuſdem infinitatis progreſſum, numeri infiniti accipiantur, falſum erit, totidem in ipſis radices, quot quadratos, & cubos, & per binarium, & per ternarium diviſibiles poſſe aſſignari, qui enim ſic correſponderent (præter paucos in accepta ſerie contentos) ultra terminum aſſumptarum radi-

cum

eum, extra progreſſionem, forent aſſumendi, quemadmodum ultra denarium excurrunt numeri quadrati, & cubi, & dupli, & tripli eorum qui ab 1 ad 10 computantur: & ultra centenarium ſunt qui ſimiliter reſpondent ſingulis numeris intra centenarium concluſis; atque ita deinceps; Itaque ratio non deeſt, cur crederemus, ipſummet Galilæum facilè admiſſurum, quòd infinita omnem æqualitatis, & inæqualitatis majoris, ac minoris, ipſamque aliorum graduum varietatem induere poſſint, neque ægrè laturum, ut inditam nobis à Deo Opt. Max. Infiniti ideam, quoad fieri poteſt, aſſiduè contemplemur, ejuſdemque Auctoris noſtri infinitam eſſendi plenitudinem, immenſam, interminatam, incircumſcriptam, Sapientiæ, Potentiæ, Bonitatiſque magnitudinem, per hæc ænigmata, interim admirantes, dum paulatim ad deſpiciendas haſce finitas res & caducas animum erudientes, ad illud *Infinitorum, & Plusquam Infinitorum omnium Maximum*, ſine extenſione immenſum, ſine ſucceſſione perpetuum, ſine multitudine infinitum, omnis extenſionis originem, omnis ſucceſſionis fontem, omnis infinitatis principium, evidentiori intuitu, facie ad faciem, aliquando perſcrutandum aſpiramus. Hæc una jucundiſſima contemplatio, per interminabilis ævi ſeriem mentes noſtras jugiter occupabit, hæc una beatos efficiet: cur itaque dubitabimus hæc infinitatis noſtri Auctoris veſtigia, in admirandis operibus ſuis relicta, has ejus magnitudinis velut umbras, & ſpectra, nobis in his tenebris occurrentia, quoad licuerit, perſequi, ſiquam inde veritatis lucem eruentes, futuræ fœlicitatis ſpecimen aliquod præguſtare poſſimus?

Quod porrò ex rerum finitarum propietatibus, et undique circumſcriptis figuris, de Infiniti natura, deque immenſis ſpatiis pronunciare non vereamur, id extra reprehenſionem eſſe intelliges, ſi ex ipſis creaturis, utique finitis, exiguis, et limitatis, ad ejuſdem Creatoris noſtri,

Maxi-

Maximi, Infinitique notitiam aſcendere nos debere animadvertas, & ex earum dotibus, quamlibet imperfectis, ſummi Opificis infinitas perfectiones colligere, dum *Inviſibilia Dei, per ea quæ facta ſunt, intellecta conſpiciuntur*, ut monuit Apoſtolus. Ad hæc: tibi ipſi, ac vulgo philoſophorum potius cavendum eſt, ne te præjudicio aliquo falli permittas, dum ab Infinito Finitum omne toto genere diſtingui putas, ut alterum cum altero conferri nequeat; magnitudinum quippe finitarum diviſibilitas in infinitum, tot phyſicis, & geometricis argumentis demonſtrata, & apud ſapientes omnes jam inconcuſſa, arguit ipſaſmet ad quoddam Infiniti genus pariter pertinere, tametſi, quia nobis ordinariè tractandæ occurrunt, ab infinitis ſecerni, & peculiari nomine Finitorum deſignari conſueverint. Quævis materiæ particula, ſi doctiſſimum Leibnitzium audias, infinita eſt, non poteſtate dumtaxat, ſed actu ipſo, ut Scholæ loquuntur: en ejus verba ex Epiſtola ad D. Foucher Canonicum Divionenſem in Diario Pariſienſi 3. Auguſti 1693. *Je ſuis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par tout, pour mieux marquer les perfections de ſon Auteur. Ainſi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matiere, qui ne ſoit, je ne dis pas diviſible, mais actuellement diviſée; & par conſequent la moindre particelle doit eſtre conſiderée comme un monde plein d'une infinité de creatures differentes.* Quæ ſi vera, aut veris ſimilia cenſeantur, quis vetet impoſterum de finitis magnitudinibus, perinde ac de infinitis, & è contrario de infinitis, perinde ac de finitis, diſcurrere, cùm uno genere uterque magnitudinum ordo veluti comprehendatur? Præterquamquod ipſe noſtrarum demonſtrationum progreſſus apertè oſtendit, debitas cautiones à nobis minime prætermiſſas, prout rerum ferebat conditio, cùm ex rationibus finitarum quantitatum, ad ipſas infinitas vel invicem, vel cum infinities majoribus, aut mino-

minoribus comparandas gradum faceremus.

Cæterùm quæ mihi obieciſti Trevoltienſium Sociorum, qui monumenta Scientiarum, ac bonarum Artium perſcribunt, teſtimonia, noſtræ cauſæ non admodum officere judico. Ajunt illi artic. 33. menſium Maii, & Junii anni 1701 in recenſione Methodi Jacobi Bernoulhi ad determinandos evolutarum radios „ *Analyſim infinitè parvorum* [*juxta phraſim D. Hoſpitalis*] *in ipſiuſmet Infiniti viſcera penetrare, nec Infinitum dumtaxat complecti, ſed Infinitum infiniti, aut etiam infinitorum Infinitatem: at optandum eſſe, ut ejuſmodi Analyſis, quam contendunt fœcunditate admirabili præditam, tantam evidentiam ſecum afferret, quantam à Geometria jure expectamus: Sed cùm audiantur differentes de Infinito, deque Infinito infiniti, ac de Infinito infinities infiniti, atque ita deinceps ſine limite progrediendo, cùmque finitis magnitudinibus hæ infinitorum Infinitates applicantur, non ſemper contingit, eos quos erudire, atque ad aſſenſum cogere conantur, tanta ingenii vi præditos eſſe, quanta requireretur, ut in adeo profundis abyſſis recondita myſteria diſcernere queant* „ & infra ſub finem „ *Qui antiquis Geometrarum ratiociniis aſſueti ſunt, nonniſi ægrè ab iis ſe avelli patientur, ut tam abſtractas methodos proſequantur: ac facilè malint non adeò longè progredi, quàm novas vias ingredi ad Infinitum infinities infiniti ducentes, in quibus non adeò claram circa ſe lucem ſemper aſpicient, ac ſatis obvio aberrandi periculo ſe frequenter obnoxios ſentient. Non ſufficit in rebus geometricis rectè concludere, niſi & legitimam eſſe illationem evidenter nobis innoteſcat.* „

In quibus patet, non improbari quidem ipſammet infinitè parvorum Analyſim, nec doctrinam infinities infinitorum, velut erroris ſuſpectam, traduci, ſed unum hoc querelæ ſubiectum eſſe, quòd non ſatis clarè, & evidenter ab hujus methodi cultoribus hæc omnia tradantur, ſed magni alicujus myſterii ad inſtar, intricatioris calculi velo involuta proponi conſueverint; quod fortaſſe in noſtro

tra-

tractatu culpare non poterunt, in quo dilucidè, ut arbitror, atque ex ſeveriori Geometrarum methodo demonſtrata omnia deprehendent. In eam quippe ſententiam, & nos ſponte concedimus, optandum eſſe, ut quæ per analyticum calculum inveniuntur, ad geometricam potius amuſſim exacta, ſi fieri poteſt, proponantur, quàm ut per ſymbola, multiplici præſertim exponentium gradu, & radicum implicatarum ſignis affecta, implicentur, ex quibus non ſtatim, uno velut intuitu, quemadmodum ex linearibus demonſtrationibus, veritatem expoſitorum Theorematum Lector elicere poteſt, ſed longum ejuſdem calculi ſibimet repetendi tędium ſubire cogitur, antequàm certam propoſitæ rei notitiam ſibi comparet, non minori plerumque labore, quàm ſi ab initio eidem veritati ex integro per ſemetipſum indagandæ animum applicuiſſet.

Hæc habui, quæ difficultatibus tuis pro nunc reponerem: ſiquid exinde lucis haurire poteris, ea fruere; ſiquid verò obſcurius, præ argumenti ipſius conditione, dictum invenies, id quam primùm, ſincera, qua invicem utimur, libertate indicare ne prætermittas, congruam ex me dilucidationem, ſuo tempore, reportaturus.

Vive, vale; & ſiquid noviſti rectiùs iſtis,
Candidus imperti: ſi non, his utere mecum.

Dabam Aretii Kalendis Septembris MDCCIX.

„ DOMINUS REGNABIT IN ÆTERNUM, ET ULTRA „
Exod. cap. 15. *v.* 18.

FINIS.

AP-